

DS5 de Mathématiques - 2 heures

samedi 21 mars 2026

*Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.**Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.****L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.*****Exercice n°1 (Géométrie plane)** (4 points: 1) 2x0,5 2) 0,5+2x0,25 3) 0,5 4) 1 5) 0,5)

On munit le plan $\mathcal{P}$ du repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(7, 3)$, $B(3, -1)$, $C(1, 1)$. On désignera par h_B la hauteur du triangle ABC passant par B.

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle. Évaluer son aire.
- 2) Trouver une équation cartésienne de h_B et préciser les coordonnées de l'orthocentre H de ABC. À quelle distance de h_B se situe l'origine O du repère?
- 3) L'isobarycentre G des sommets A,B,C satisfait à l'équation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ Trouver les coordonnées de G.
- 4) Exploiter 1) afin de déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC.
- 5) Vérifier que H, G et Ω sont sur une même droite (dite droite d'Euler).

Exercice n°2 (Géométrie dans l'espace) (7,25 points: A - 1) 0,25+0,5+0,5 2) 0,5 3) 1.5) B - 1) 0,5+0,5 2) 0,5 3) 1 4) 0,5 5) 0,5+0,5)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A

Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on considère les deux droites $\mathcal{D}_p$ d'équations $x=y=p$ et $\mathcal{D}'_q$ d'équations $x + qy - z = q$ $x - y - z = 0$.

- 1) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}_p$. Construire un vecteur directeur de $\mathcal{D}'_q$. Montrer que ces deux droites ne sont jamais parallèles.

Notons alors $\Delta_{p,q}$ l'unique droite perpendiculaire à $\mathcal{D}_p$ et $\mathcal{D}'_q$.

- 2) Déterminer un vecteur directeur de $\Delta_{p,q}$.
- 3) Construire un système d'équations cartésiennes ayant $\Delta_{p,q}$ comme graphe.

Partie B

On considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ et, pour tout réel t , le plan $\mathcal{P}_t$ d'équation $x+y+z=t$.

- 1) Déterminer les coordonnées du centre Ω de $\mathcal{S}$ ainsi que son rayon R.
- 2) Décrire en fonction de t la nature de l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_t$.
- 3) Construire une équation paramétrique de la droite Δ passant par Ω et normale à $\mathcal{P}_t$.
- 4) À quelle distance se trouve l'origine O de Δ ?
- 5) Trouver le centre et le rayon du cercle intersection de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{P}_{2+\sqrt{3}}$.

Exercice n°3 (Polynômes - Factorisation) (2,5 points: 1) 0,5 2) 0,5 3) 0,5 4) 1)

On pose $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ et $B = X^2 + 1$.

- 1) Évaluer le reste R de la division euclidienne de A par B .
- 2) Déterminer le quotient Q de A par $(X - 1)^2$.
- 3) Factoriser Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
- 4) En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ de A en produit de polynômes irréductibles.

Exercice n°4 (Polynômes - Outils d'analyse) (6,25 points: 1) 3x0,25 2) 2x0,25+1 3) 1 4) 1 5) a)

0,25 b) 0,25+0,5 6) 1)

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par ses deux premiers termes $U_0(X) = 1$ et $U_1(X) = 2X$ et la relation de récurrence $U_{n+1}(X) = 2X U_n(X) - U_{n-1}(X)$.

- 1) Déterminer les formes développées de $U_2(X)$, $U_3(X)$ et $U_4(X)$.
- 2) Que peut-on conjecturer en ce qui concerne le degré de U_n et la valeur de son coefficient dominant? Vérifier proprement cette conjecture par récurrence.
- 3) Montrer alors que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
- 4) En exploitant 3) prouver que toutes les racines de U_n sont réelles et comprises entre -1 et +1.
- 5) À tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, associons le scalaire $P.Q = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) \sqrt{1-x^2} dx$.
- a) Expliquer pourquoi $P.Q$ est bien défini. b) Montrer que, pour tout polynôme P , le scalaire $P.P$ est positif et ne s'annule que si P est le polynôme nul.

L'application précédente définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Dans ce contexte, la norme d'un polynôme P n'est autre que la racine carrée de $P.P$ (i.e. $\|P\|^2 = P.P = \int_{-1}^1 P(x)^2 \sqrt{1-x^2} dx$) et l'angle θ entre deux polynômes P, Q est défini par son cosinus à travers l'identité géométrique $P.Q = \|P\| \cdot \|Q\| \cdot \cos(\theta)$.

- 6) En effectuant le changement de variable $x = \cos(t)$, montrer que les polynômes U_n sont deux à deux orthogonaux et de norme $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ i.e. que $U_n \cdot U_m = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}$ où $\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ est le symbole de kronecker.