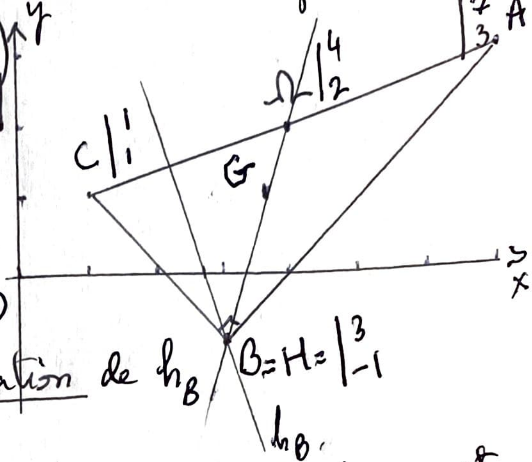
DS5 - mars 26

Ex1 1) Puisque $\vec{AB}\begin{vmatrix}-4\\-4\end{vmatrix}$, $\vec{AC}\begin{vmatrix}-6\\-2\end{vmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{vmatrix}-2\\2\end{vmatrix}$ on a $AB^2=32$, $AC^2=40$ et $BC^2=8$ de sorte que $AB^2+BC^2=AC^2$. Le triangle ABC est donc rectangle en B (Pythagore)

Son aire est $\dfrac{BC\times AB}{2}=\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{32}}{2}=8$



2) $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\in h_B \Leftrightarrow \vec{BM}\cdot\vec{AC}=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3\\y+1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}=0$

$3x+y-8=0$ est donc une équation de h_B

Comme l'orthocentre est l'intersection des hauteurs et que ABC est rectangle en B, $H=B\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$

La distance de O à h_B vaut $\dfrac{|3.0+0-8|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}$

3) D'où $\vec{OG}=\dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}=\dfrac{1}{3}\begin{vmatrix}7+3+1=11\\3-1+1=3\end{vmatrix}$

soit $G\begin{vmatrix}\frac{11}{3}\\1\end{vmatrix}$

4) ABC étant rectangle en B, le cercle circonscrit à ABC admet [AC] comme diamètre. Son centre Ω est donc le milieu de [AC] d'où $\Omega\begin{vmatrix}\frac{1+7}{2}=4\\\frac{1+3}{2}=2\end{vmatrix}$

$R=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$

5) $\det(\vec{BG},\vec{B\Omega})=\begin{vmatrix}\frac{11}{3}-3 & 4-3\\1+1 & 2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & 1\\2 & 3\end{vmatrix}=0$

Par suite H, Ω, G sont bien alignés.

Ex2 A- 1) $\vec{k}$ est un vecteur directeur de D_p. Un vecteur directeur de D'_q est obtenu par produit vectoriel ou par formation d'une équation paramétrique de D'_q. Choisissons cette seconde voie. $\mathcal{D}'_q : \begin{cases} x+qy-z=0 \\ qx-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+qy=t \\ qx-y=t \\ z=t, \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

On obtient $\mathcal{D}'_q : \begin{cases} x = \dfrac{1+q}{1+q^2}\,t \\ y = \dfrac{q-1}{1+q^2}\,t \\ z = t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Ainsi $\vec{u}'\begin{vmatrix} 1+q \\ q-1 \\ 1+q^2 \end{vmatrix}$ est directeur de $\mathcal{D}'_q$

Comme $\vec{u}'$ n'est pas proportionnel à $\vec{k}$, $\mathcal{D}_p$ et $\mathcal{D}'_p$ ne sont pas parallèles.

2) $\vec{k}\wedge\vec{u}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1+q \\ q-1 \\ 1+q^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-q \\ 1+q \\ 0 \end{vmatrix}$ est donc directeur de $\Delta_{p,q}$

3) Notons $\mathcal{P}_{p,q}$ le plan contenant $\mathcal{D}_p$ et $\Delta_{p,q}$. Il a donc pour vecteurs directeurs $\vec{k}$ et $\vec{k}\wedge\vec{u}'$ et passe par le point $A_p\begin{vmatrix} p \\ p \\ 0 \end{vmatrix}$ contenu dans $\mathcal{D}_p$.

D'où $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathcal{P}_{p,q} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{A_pM}, \vec{k}, \vec{k}\wedge\vec{u}') = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-p & 0 & 1-q \\ y-p & 0 & 1+q \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1-q)(y-p) - (1+q)(x-p) = 0$$

Soit $\mathcal{P}_{p,q} : (1+q)x - (1-q)y - 2pq = 0$

Soit $\mathcal{P}'_{p,q}$ le plan contenant $\mathcal{D}'_q$ et $\Delta_{p,q}$. Il a pour vecteurs directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{k}\wedge\vec{u}'$ et passe par le point origine contenu dans $\mathcal{D}'_q$.

Ainsi $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathcal{P}'_{p,q} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}', \vec{k}\wedge\vec{u}') = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1+q & 1-q \\ y & q-1 & 1+q \\ z & 1+q^2 & 0 \end{vmatrix} = (1+q)^2 z + (1+q^2)(1-q)y + (1-q)^2 z - (1+q)(1+q^2)x = 0$$

$\Leftrightarrow (1+q)(1+q^2)x-(1+q^2)(1-q)y-\underbrace{[(1+q)^2+(1-q)^2]}_{2(1+q^2)}z=0$

Soit $\mathcal{P}'_{p,q} : \underline{(1+q)x-(1-q)y-2z=0}$

Ainsi $\boxed{\Delta_{pq}=\mathcal{P}_{p,q}\cap\mathcal{P}'_{p,q} : \begin{cases}(1+q)x-(1-q)y-2pq=0\\(1+q)x-(1-q)y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1+q)x-(1-q)y-2pq=0\\ z=pq\end{cases}}$

B- 1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9-2$

Ainsi $S : (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4^2$ et $\boxed{\Omega\begin{vmatrix}1\\-2\\3\end{vmatrix}, R=4}$

2) $d(\Omega,\mathcal{P}_t)=\dfrac{|1-2+3-t|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|t-2|}{\sqrt{3}}$

- $\underline{\text{si } d(\Omega,\mathcal{P}_t)=R}$ i.e. $\dfrac{|t-2|}{\sqrt{3}}=4 \Leftrightarrow \underline{t=2\pm4\sqrt{3}}$

alors $S\cap\mathcal{P}_t$ se réduit à 1 point

- $\underline{\text{si } d(\Omega,\mathcal{P}_t)>R}$ i.e. $\underline{t<2-4\sqrt{3} \text{ ou } t>2+4\sqrt{3}}$

alors $S\cap\mathcal{P}_t=\emptyset$

- $\underline{\text{si } d(\Omega,\mathcal{P}_t)<R}$ i.e. $\underline{t\in]2-4\sqrt{3},2+4\sqrt{3}[}$

alors $S\cap\mathcal{P}_t$ est un cercle

3) $\boxed{M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}=t\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}, t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3+t, \ t\in\mathbb{R}\end{cases}}$

4) $d(O,\Delta)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega O}\wedge\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}\right\|}{\left\|\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}\right\|}$ or $\overrightarrow{O\Omega}\wedge\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\-2\\3\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5\\2\\3\end{vmatrix}$

d'où $\underline{d(O,\Delta)=\dfrac{\sqrt{5^2+2^2+3^2}}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{\dfrac{38}{3}}}}$

5) D'après 2) $d(\Omega, \mathcal{P}_{2+\sqrt{3}}) = 1$. Notons r le rayon de ce cercle. D'après Pythagore $r^2 + d^2(\Omega, \mathcal{P}_{2+\sqrt{3}}) = R^2$

d'où $r^2 = 16 - 1 = 15$ et $\boxed{r = \sqrt{15}}$

Son centre C satisfait $C = \Delta \cap \mathcal{P}_{2+\sqrt{3}}$. Avec $C \left| \begin{array}{l} x_C = 1+t \\ y_C = -2+t \\ z_C = 3+t \end{array} \right.$

d'après 3) on a :

$C \in \mathcal{P}_{2+\sqrt{3}}$ i.e $x_C + y_C + z_C = (1+t) + (-2+t) + (3+t) = 3t + 2 = 2+\sqrt{3}$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{C \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right.}$$

Ex3

1) $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ où $R(X) = aX + b$ est le reste de la division euclidienne de A par B $(a, b \in \mathbb{R})$.

Or $B(i) = 0$ d'où $A(i) = ai + b$

$$A(i) = -\cancel{1} - 2i + \cancel{1} + \cancel{2i} - \cancel{1} - \cancel{2i} + \cancel{1}$$

soit $a = -2$ et $b = 0$ et $\underline{R(X) = -2X}$

2) $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$

$$\begin{array}{r|l}
X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 & X^2 - 2X + 1 \\
\hline
X^6 - 2X^5 + X^4 & X^4 + X^2 + 1 \\
\hline
X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 & \\
X^4 - 2X^3 + X^2 & \\
\hline
X^2 - 2X + 1 & \\
X^2 - 2X + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Ainsi $\boxed{Q = X^4 + X^2 + 1}$

3) $Z^2 + Z + 1 = (Z - j)(Z - \bar{j})$ donc X est une racine de Q si et seulement si $X^2 = j$ ou $X^2 = \bar{j}$

Mais $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ donc $X^2 = j \Leftrightarrow X = \pm e^{\frac{i\pi}{3}}$

De même $X^2 = \bar{j} \Leftrightarrow X = \pm e^{-\frac{i\pi}{3}}$

Par suite $\boxed{Q = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$

4) D'après 2) et 3)

$$\boxed{A = (X-1)^2\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

Il en résulte que

$$A = (X-1)^2\left(X^2 - 2\cos\tfrac{\pi}{3}.X + 1\right)\left(X^2 + 2\cos\tfrac{\pi}{3}.X + 1\right)$$

soit $\boxed{A = (X-1)^2\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)}$

Ex4

1) $U_2(X) = 2X\,U_1(X) - U_0(X) = 2X(2X) - 1 = 2^2X^2 - 1$

$U_3(X) = 2X\,U_2(X) - U_1(X) = 2X(2^2X^2 - 1) - 2X = 2^3X^3 - 4X$

$U_4(X) = 2X\,U_3(X) - U_2(X) = 2X(2^3X^3 - 4X) - (2^2X^2 - 1)$

$= 2^4X^4 - 12X^2 + 1$

Donc
$$\boxed{\begin{array}{l} U_2(X) = 2^2X^2 - 1 \\ U_3(X) = 2^3X^3 - 4X \\ U_4(X) = 2^4X^4 - 12X^2 + 1 \end{array}}$$

2) On peut conjecturer que $d^\circ U_n = n$ et U_n a pour coefficient dominant 2^n.

Vérification : Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : " $d^\circ U_n = n$ et U_n a pour coefficient dominant 2^n ".

- $\boxed{\mathcal{P}_0 \text{ et } \mathcal{P}_1 \text{ sont vraies}}$

- Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ soient vrais.

Alors, puisque $U_{n+1}(X) = 2X\,U_n(X) - U_{n-1}(X)$,

$d^\circ U_{n+1} = d^\circ 2X U_n(X) = d^\circ X + d^\circ U_n = 1 + n$

et le coefficient dominant de U_{n+1} est 2 fois celui de U_n soit $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. D'où $\boxed{\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}}$

- On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Vérifions le par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la nouvelle propriété : " $\forall \theta \in]0, \pi[$, $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ ".

- $U_0(X) = 1$ donc, si $\theta \in]0,\pi[$, $U_0(\cos\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$ d'où $\mathcal{P}_0$ est vraie
- $U_1(X) = 2X$ donc, si $\theta \in]0,\pi[$, $U_1(\cos\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ puisque $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, d'où $\mathcal{P}_1$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ soient vraies.

Alors $U_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, U_n(\cos\theta) - U_{n-1}(\cos\theta)$

$$\overset{hyp}{=} 2\cos\theta \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\cos\theta\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

Or $2\sin p\cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q)$ d'où $2\cos\theta\sin((n+1)\theta) = \sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta)$. Par suite

$$U_{n+1}(\cos\theta) = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta}$$ si $\theta \in]0,\pi[$ et

$$\mathcal{P}_{n-1} \wedge \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$$

Il est donc vrai que, $\forall \theta \in]0,\pi[$, $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

4) Puisque $\sin((n+1)\theta) = 0$ lorsque $(n+1)\theta \equiv 0\ [\pi]$, il résulte du 3) que $U_n(\cos\theta) = 0$ pour $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$ et donc que U_n admet $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ comme racine pour $k \in [\![1,n]\!]$. Cela fait n zéros compris entre -1 et $+1$ pour un polynôme de degré n.

Le théorème fondamental de l'algèbre nous garantit que toutes les racines de U_n sont donc réelles et comprises entre -1 et $+1$.

5) a) Comme polynômes, P et Q sont continus sur $[-1,+1]$. On sait également que $\sqrt{1-x^2}$, comme composée de fonctions continues, est continue sur $[-1,1]$. Ainsi $P(x)Q(x)\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et $\underline{P.Q \text{ est bien défini}}$.

b) Par positivité de l'intégrale, puisque $P^2(x)\sqrt{1-x^2} \geq 0$ sur $[-1,1]$, $P.P \geq 0$. Il est clair que $P.P = 0$ si $P=0$. Supposons que $P \neq 0$. Alors P doit être différent de zéro en un point $x_0 \in]-1,1[$ (car sinon P admettrait une infinité de zéros).

Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $P^2(x) \geq \frac{P^2(x_0)}{2}$ (on prend ε suffisamment petit pour que $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subset]-1,+1[$.)

Par positivité de l'intégrale on a alors :

$$P.P \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} P^2(x)\sqrt{1-x^2}\,dx \geq \frac{P^2(x_0)}{2}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Soit $P.P > 0$

Donc $\underline{\text{si } P \neq 0 \Rightarrow P.P > 0}$.

6) $$U_n.U_m = \int_{-1}^{+1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} U_n(\cos\theta)U_m(\cos\theta)(-\sin^2\theta)\,d\theta$$

avec $x=\cos\theta$, $dx = -\sin\theta\, d\theta$

si $x=-1$, $\theta=\pi$ si $x=1$, $\theta=0$ $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sin\theta$

Soit $U_n \cdot U_m = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\cancel{\sin\theta}} \frac{\sin((m+1)\theta)}{\cancel{\sin\theta}} \cancel{\sin^2\theta}\, d\theta$

Mais $\sin p \sin q = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q) - \cos(p+q)\right]$ d'où

$$U_n \cdot U_m = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\cos((n-m)\theta) - \cos((n+m+2)\theta)\right) d\theta$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos((n+m+2)\theta)\, d\theta = \frac{-1}{n+m+2}\left[\sin((n+m+2)\theta)\right]_0^{\pi} = 0$

donc $\displaystyle U_n \cdot U_m = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n-m)\theta)\, d\theta$

- Si $n \neq m$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos((n-m)\theta)\, d\theta = \frac{-1}{n-m}\left[\sin((n-m)\theta)\right]_0^{\pi} = 0$

- Si $n = m$ $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(0\theta)\, d\theta = \pi$

On a donc bien $\boxed{U_n \cdot U_m = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}}$