

Devoir maison n° 18

A rendre le jeudi 2 avril 2026

Exercice 1 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer si elle admet des extrema locaux.
2. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente $\mathcal{T}_0$ en son point d'abscisse 0.
Donner une équation de $\mathcal{T}_0$ et préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$ au voisinage de 0.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$.
Donner une équation de $\mathcal{D}$ et préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$.
Donner une équation de Δ et préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ au voisinage de $-\infty$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et calculer sa dérivée f' .
2. Minorer f sur $[1, +\infty[$ puis en déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Majorer f sur $]0, 1]$ puis en déduire la limite de f en 0_+ .
4. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variations de f .
5. Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f en 1.
6. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en 1. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 1.