

Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et I un intervalle de \mathbb{R} .

1 Équations linéaires d'ordre 1

1.1 Définition et solution générale

Définition 1. Soient $a, b : I \mapsto \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I données.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** une équation de la forme

$$(E) : y' + a(x)y = b(x), \quad \text{où } y : I \mapsto \mathbb{K} \text{ est une fonction dérivable inconnue.}$$

On appelle **équation homogène associée** à (E) l'équation différentielle $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.

Théorème 1. Soit l'équation homogène $(E_H) : y' + a(x)y = 0$, où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

y est solution de (E_H) sur I ssi y est de la forme $y : x \mapsto Ce^{-A(x)}$,

où $C \in \mathbb{K}$ est une constante et A une primitive de a sur I .

Exemple 1. Résoudre a) $y' + 2y = 0$ b) $y' + xy = 0$ c) $\cos(t)y' + 2\sin(t)y = 0$.

Propriété 1. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ et $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.

Si elle existe, on note y_p une solution particulière de (E) .

y est solution de (E) sur I ssi $y = y_p + y_H$, où y_H est une solution de (E_H) sur I .

Exemple 2. Résoudre a) $y' + 2y = 1$ b) $y' + xy = x^3 + 3x$ c) $\cos(t)y' + 2\sin(t)y = \frac{1}{2}\sin(2t)$.

1.2 Recherche d'une solution particulière

Propriété 2. Méthode de la variation de la constante (MVC)

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

(E) admet une solution particulière de la forme $y_p = Ce^{-A}$,

où $A : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de a sur I

et $C : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction dérivable sur I vérifiant $C' = be^A$.

Exemple 3. Résoudre $xy' + y = xe^x$.

Théorème 2. et définition Soit l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors il existe une unique solution y de (E) sur I vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Ainsi le **problème de Cauchy** $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' + a(x)y = b(x) \end{cases}$ admet une unique solution sur I .

Exemple 4. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y(1) = 2 \\ xy' + y = xe^x \end{cases}$.

Propriété 3. Principe de superposition Soient $b_1, b_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I .

Si y_1 est solution de $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 de $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution de $(E) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Exemple 5. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = \sin(t) + 3 \cos(2t)$.

2 Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Définition et solution générale

Définition 2. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I .

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** une équation de la forme $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$, où $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction inconnue.

L'équation homogène associée à (E) est l'équation différentielle $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$.

Exemple 6. Soit l'équation différentielle $(E_H) : y'' + 2y' + 2y = 0$ et $\phi : t \mapsto e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que ϕ est une solution particulière de l'équation (E_H) sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que ϕ est bornée sur \mathbb{R}_+ et déterminer sa limite lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Théorème 3. et définition Soit l'équation homogène $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$, où $a, b \in \mathbb{C}$.

On appelle **équation caractéristique** de (E_H) , l'équation $(E_c) : r^2 + ar + b = 0$, où $r \in \mathbb{C}$.

Notant Δ son discriminant, on a :

- si $\Delta \neq 0$, (E_c) admet deux racines complexes r_1 et r_2 et les solutions de (E_H) sont les fonctions $y : x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ sont des constantes.
- si $\Delta = 0$, (E_c) admet une racine complexe double r_0 et les solutions de (E_H) sont les fonctions $y : x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{r_0 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

Exemple 7. Résoudre dans \mathbb{C} : a) $y'' - 2iy' - y = 0$ b) $y'' + \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

Corollaire 1. Cas réel Soit l'équation homogène $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

- si $\Delta > 0$, (E_c) admet deux racines réelles r_1 et r_2 et les solutions réelles de (E_H) sont les fonctions $y : x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles
- si $\Delta = 0$, (E_c) admet une racine réelle double r_0 et les solutions réelles de (E_H) sont les fonctions $y : x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{r_0 x}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles
- si $\Delta < 0$, (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions réelles de (E_H) sont les fonctions $y : x \mapsto e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles.

Exemple 8. Résoudre dans \mathbb{R} : a) $y'' + 2y' + 2y = 0$ b) $y'' - \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

Propriété 4. Soit l'équation différentielle $(E) y'' + ay' + by = f(x)$ et $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$.

Si elle existe, on note y_p une solution particulière de (E) .

y est solution de (E) sur I ssi $y = y_p + y_H$, où y_H est une solution de (E_H) sur I .

Exemple 9. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = t$.

2.2 Recherche d'une solution particulière de $y'' + ay' + by = f(x)$

Cas où $f(x) = ce^{\lambda x}$, avec $(a, b, c, \lambda) \in \mathbb{K}^4$:

On cherche une solution particulière sous la forme

- $y_p : x \mapsto \alpha e^{\lambda x}$, si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c)
- $y_p : x \mapsto \alpha x e^{\lambda x}$, si λ est racine simple de (E_c)

- $y_p : x \mapsto \alpha x^2 e^{\lambda x}$, si λ est racine double de (E_c) .

Exemple 10. Résoudre : a) $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$ b) $y'' - 4iy' - 4y = e^{it}$

Cas où $f(x) = c \cos(\omega x)$ ou $f(x) = c \sin(\omega x)$, avec $(a, b, c, \omega) \in \mathbb{R}^4$:

On cherche une solution particulière sous la forme

- $y_p : x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$, si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c)
- $y_p : x \mapsto \alpha x \cos(\omega x) + \beta x \sin(\omega x)$, si $i\omega$ est racine simple de (E_c) .

Exemple 11. Résoudre : a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(t)$; b) $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 4. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(x)$.

Si $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$ alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y'' + ay' + by = f(x) \end{cases}$$

admet une unique solution sur I .

Exemple 12. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'' + 2y' + 2y = \cos(t) \end{cases} .$$

Propriété 5. Principe de superposition Soient $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I .

Si y_1 est solution de $(E_1) : y'' + ay' + by = f_1(x)$ et y_2 de $(E_2) : y'' + ay' + by = f_2(x)$,

alors $y_1 + y_2$ est solution de $(E) : y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$.

Exemple 13. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = t + \cos(t)$.