

Fiche de cours avril

1 Espaces vectoriels

On considère E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ une famille de vecteurs de E .

1) Soit G un sous ensemble de E . G est un **sous espace vectoriel** de E si

2) $\mathcal{F}$ est une **famille libre** de E si

3) $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E si

4) $\mathcal{F}$ est une **base** de E si

5) **Bases canoniques**

- de $\mathbb{K}^n$
- de $\mathbb{K}_n[X]$
- de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

6) Le **rang** de $\mathcal{F}$ est défini par : $\text{rg}(\mathcal{F}) =$

On considère F et G deux sev de E .

7) On dit que F et G sont en **somme directe** si

8) On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si

9) **Cas où E est de dimension finie**

• **Formule de Grassmann**

- $E = F \oplus G$ ssi

2 Dénombrement

E et F sont des ensembles finis.

1) **Cardinal d'une union disjointe** Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis et disjoints deux à deux alors

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) =$$

2) **Cardinal d'un produit cartésien** Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors
 $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_n) =$

3) **Modèle de tirages successifs dans des urnes différentes** : Si on tire successivement un élément dans l'urne E_1 contenant n_1 éléments, un élément dans E_2 à n_2 éléments, ..., un élément dans E_p à n_p éléments, alors il y a tirages possibles .

4) **Modèle de tirages successifs avec remise dans une urne** : Effectuer p tirages **successifs** avec **remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir d'éléments de cette urne. Il y a donc façons de le faire. L'**ordre** intervient et il peut y avoir **répétition** d'un élément.

5) **Nombre d'applications** F^E est fini et $\text{Card}(F^E) =$.

6) **Nombre de parties d'un ensemble** $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) =$.

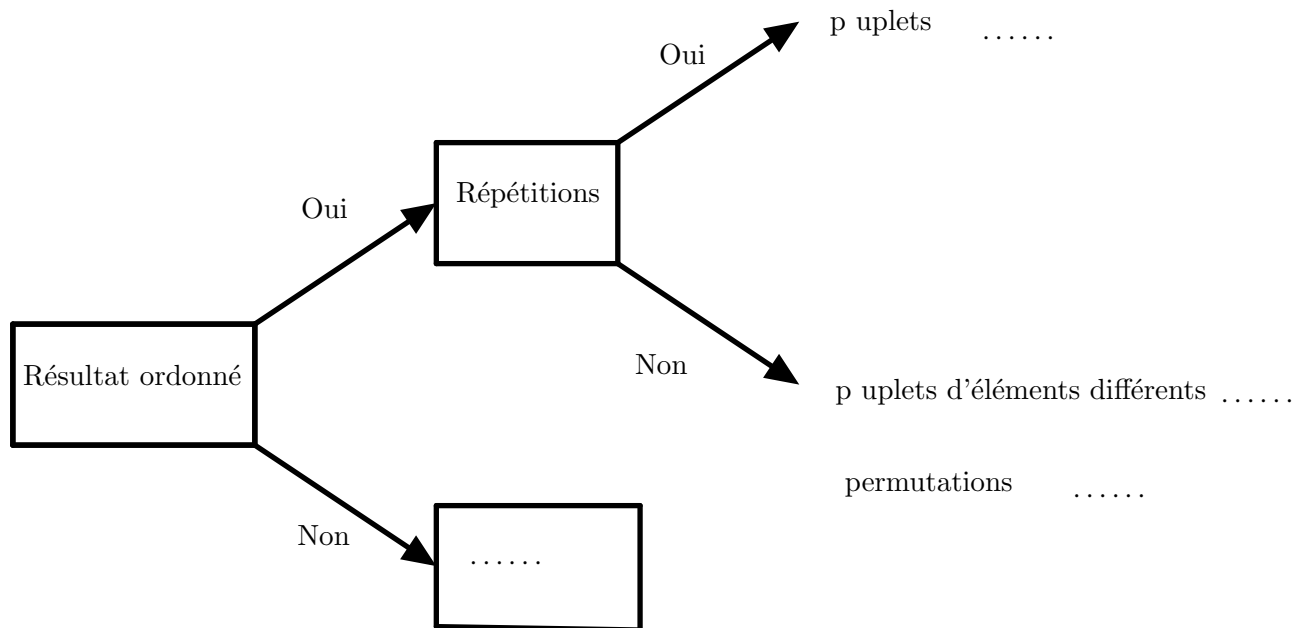
7) **Modèle de tirages successifs sans remise dans une urne** : Effectuer p tirages **successifs** et **sans remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir d'éléments de cette urne. Il y a donc façons de le faire. Dans ce cas, l'**ordre** intervient et il n'y a **pas de répétition** d'un élément.

8) **Nombre d'applications injectives** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est

9) **Nombre de permutations ou nombre de bijections** Le nombre de n -listes sans répétition de E est

10) **Modèle de tirage simultané dans une urne** : Tirer **simultanément** p éléments dans une urne qui contient n éléments, c'est choisir d'éléments de cette urne. Il y a donc façons de le faire. Dans ce cas, il n'y a **ni ordre, ni répétition**.

11) Schéma récapitulatif



3 Analyse asymptotique

1) f est **dominée** par g en a i.e $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si

2) f est **négligeable** devant g en a i.e $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si

3) f est **équivalente** à g en a i.e $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si

4) **Équivalents usuels** $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$ $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$ $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots \quad 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

5) Compatibilité avec les opérations

L'équivalence est compatible avec

6) **Formule de Taylor-Young** Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $a \in I$ alors

7) Application : DL usuels en 0

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \dots$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \dots$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \dots$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 0$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} 0$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1$$

8) **DL en a** On pose

9) **DL et équivalents** Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ et $a_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$

10) **DL, tangente et position** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $a_p \neq 0$, alors

11) **DL, asymptote et position** Si $tf\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 t + a_p t^p + o(t^p)$ avec $a_p \neq 0$,

alors on peut écrire $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=}$

Dans ce cas, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation

4 Applications linéaires

E et F sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels

Si $\dim E < \infty$ on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

1) $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si

Dans toute la suite on considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$

2) $\operatorname{Ker} f =$

3) $\operatorname{Im} f =$

Si $\dim E < \infty$, $\operatorname{Im} f =$

4) **Théorème du rang :**

5) f est **injective** ssi

Si $\dim E < \infty$, f est injective ssi

6) f est **surjective** ssi

Si $\dim E < \infty$, f est surjective ssi

7) f est **bijjective** ssi

Si $\dim E < \infty$, f est un isomorphisme de E sur F ssi

8) Si $\dim E = \dim F$ alors f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.

9) **Conditions nécessaires en dimension finie**

- Si $\dim E > \dim F$ alors f ne peut être
- Si $\dim E \neq \dim F$ alors f ne peut être

10) f est un **endomorphisme** si

11) f est un **isomorphisme** si

12) f est un **automorphisme** si

Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$.

13) **Projecteur** sur F parallèlement à G p :

14) est le projecteur sur G parallèlement à F .

15) **Caractérisation des projecteurs** $p : E \longrightarrow E$ est un projecteur ssi

Dans ce cas, $E = \dots \oplus \dots$ et p est le projecteur sur parallèlement à

16) **Symétrie** par rapport à F parallèlement à G s :

17) ... est la symétrie par rapport à G parallèlement à F

18) $p = \dots$ est le projecteur sur F parallèlement à G ssi $s = \dots$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

19) **Caractérisation des symétries** $s : E \longrightarrow E$ est une symétrie ssi

Dans ce cas $E = \dots \oplus \dots$ et s est la symétrie par rapport à $F = \dots$ parallèlement à $G = \dots$.