

Fiche de cours avril complétée

1 Espaces vectoriels

On considère E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ une famille de vecteurs de E .

1) Soit G un sous ensemble de E . G est un **sous espace vectoriel de E** si (2 méthodes)

- $G \neq \emptyset$. En particulier $0_E \in G$ et $\forall u, v \in G, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u + \lambda v \in G$
- $G = \text{Vect}(\dots)$ ce qui permet de trouver une base et la dimension de G

2) $\mathcal{F}$ est une **famille libre** de E si pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

3) $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E si $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$:

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

4) $\mathcal{F}$ est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E

i.e tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_n$:

$$\forall u \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Dans ce cas, on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées (composantes) de u dans la base $\mathcal{F}$.

5) **Bases canoniques**

- de $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, où 1 est sa i ème composante.
- de $\mathbb{K}_n[X]$: $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$
- de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $E_{i,j}$ matrice de coefficients tous nuls sauf celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

6) Le **rang** de $\mathcal{F}$ est défini par : $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}\{e_i, 1 \leq i \leq n\})$

On considère F et G deux sev de E .

7) On dit que F et G sont en **somme directe** si $\forall w \in F + G, \exists! (u, v) \in F \times G, w = u + v$.

ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

8) On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si $\forall w \in E, \exists! (u, v) \in F \times G, w = u + v$.

ssi $E = F \oplus G$ c.à.d. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

9) **Cas où E est de dimension finie**

- **Formule de Grassmann** $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
- $E = F \oplus G$ ssi $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

2 Dénombrement

E et F sont des ensembles finis.

1) **Cardinal d'une union disjointe** Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis et disjoints deux à deux alors

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(E_i).$$

2) **Cardinal d'un produit cartésien** Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \dots \times \text{card}(E_n)$

3) **Modèle de tirages successifs dans des urnes différentes** : Si on tire successivement un élément dans l'urne E_1 contenant n_1 éléments, un élément dans E_2 à n_2 éléments, ..., un élément dans E_p à n_p éléments, alors il y a $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ tirages possibles (principe multiplicatif).

4) **Modèle de tirages successifs avec remise dans une urne** : Effectuer p tirages **successifs** avec **remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir une p -liste d'éléments de cette urne. Il y a donc n^p façons de le faire. L'**ordre** intervient et il peut y avoir **répétition** d'un élément.

5) **Nombre d'applications** F^E est fini et $\text{Card}(F^E) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$.

6) **Nombre de parties d'un ensemble** $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$.

7) **Modèle de tirages successifs sans remise dans une urne** : Effectuer p tirages **successifs** et **sans remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir une p -liste sans répétition d'éléments de cette urne. Il y a donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ façons de le faire. Dans ce cas, l'**ordre** intervient et il n'y a **pas de répétition** d'un élément.

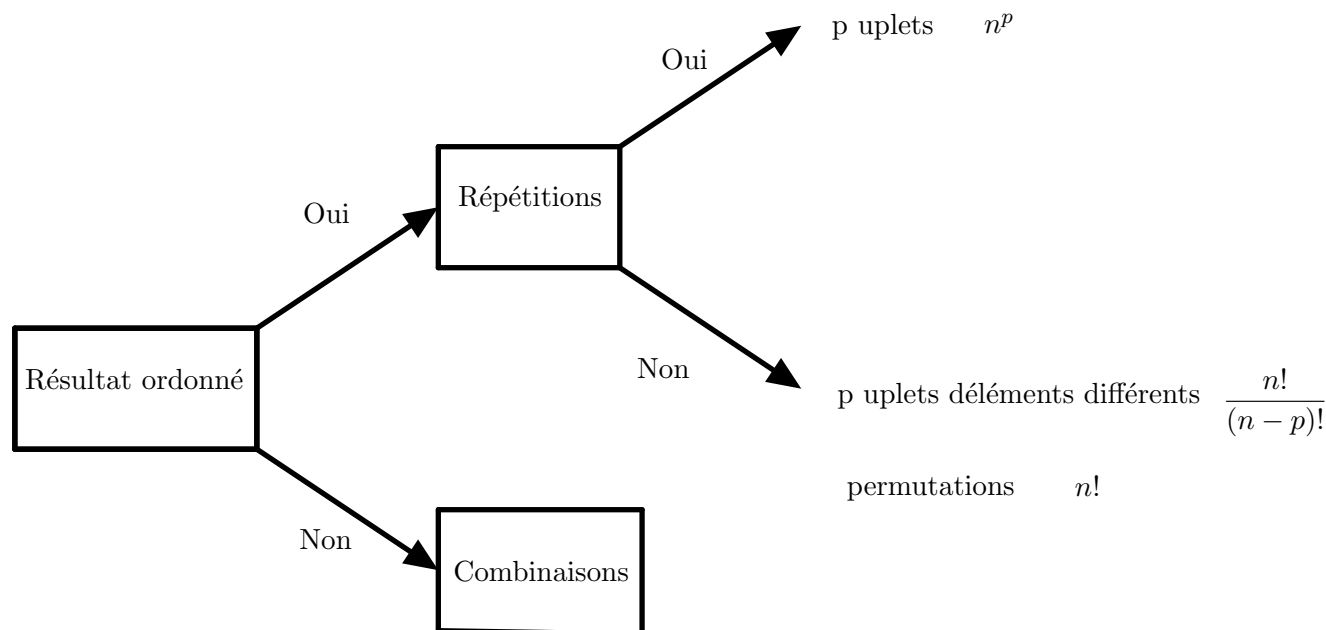
8) **Nombre d'applications injectives** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

9) **Nombre de permutations ou nombre de bijections** Le nombre de n -listes sans répétition de E est $(\text{Card}E)!$

10) **Modèle de tirage simultané dans une urne** : Tirer **simultanément** p éléments dans une urne qui contient n éléments, c'est choisir une p -combinaison d'éléments de cette urne.

Il y a donc $\binom{n}{p}$ façons de le faire. Dans ce cas, il n'y a **ni ordre, ni répétition**.

11) Schéma récapitulatif



3 Analyse asymptotique

1) f est **dominée** par g en a i.e $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

2) f est **négligeable** devant g en a i.e $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$.

3) f est **équivalente** à g en a i.e $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$.

4) **Équivalents usuels** $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

5) Compatibilité avec les opérations

Si f, g, h et l sont telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} l(x)$ alors

$$f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)l(x) \quad \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g(x)}{l(x)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, [f(x)]^k \underset{x \rightarrow a}{\sim} [g(x)]^k$$

si f et g sont strictement positives au voisinage de a , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $[f(x)]^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} [g(x)]^\alpha$.

6) **Formule de Taylor-Young** Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $a \in I$ alors

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

7) Application : DL usuels en 0

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

8) **DL en a** On pose $x = a + h$ et $h \rightarrow 0$

9) **DL et équivalents** Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ et $a_p \neq 0$ alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p.$$

10) **DL, tangente et position** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $a_p \neq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $(a, f(a))$ d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ et la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de a s'obtient en étudiant le signe du terme $a_p(x-a)^p$.

11) **DL, asymptote et position** Si $tf \left(\frac{1}{t} \right) \underset{t \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 t + a_p t^p + o(t^p)$ avec $a_p \neq 0$,

alors on peut écrire $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} a_0 x + a_1 + \frac{a_p}{x^{p-1}} + o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right).$

Dans ce cas, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = a_0 x + a_1$ en $\pm\infty$, et le signe de $\frac{a_p}{x^{p-1}}$ donne la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

4 Applications linéaires

E et F sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels

Si $\dim E < \infty$ on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

1) $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si $\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$

Dans toute la suite on considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$

2) $\operatorname{Ker} f = \{u \in E / f(u) = 0_F\} = f^{-1}(0_F)$

3) $\operatorname{Im} f = \{f(u), u \in E\} = f(E)$

Si $\dim E < \infty$, $\text{Im } f = \text{Vect } (f(e_1), \dots, f(e_p))$

4) **Théorème du rang** : Si $\dim E < \infty$, $\dim E = \text{rg } (f) + \dim \text{Ker } (f)$

5) f est **injective** ssi $\text{Ker } f = \{0_E\}$

Si $\dim E < \infty$, f est injective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre

6) f est **surjective** ssi $\text{Im } f = F$

Si $\dim E < \infty$, f est surjective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est génératrice de F

7) f est **bijective** ssi f est injective et surjective.

Si $\dim E < \infty$, f est un isomorphisme de E sur F ssi $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de F .

8) Si $\dim E = \dim F$ alors f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.

9) **Conditions nécessaires en dimension finie**

- Si $\dim E > \dim F$ alors f ne peut être injective.
- Si $\dim E < \dim F$ alors f ne peut être surjective.
- Si $\dim E \neq \dim F$ alors f ne peut être bijective.

10) f est un **endomorphisme** si f est linéaire et $E = F$

11) f est un **isomorphisme** si f est linéaire et bijective

12) f est un **automorphisme** si f est linéaire, bijective et $E = F$ (endo + iso)

Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$.

13) **Projecteur** sur F parallèlement à G $p : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 \end{cases}$

14) $\text{Id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F .

15) **Caractérisation des projecteurs** $p : E \longrightarrow E$ est un projecteur ssi $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$.

Dans ce cas, $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

16) **Symétrie** par rapport à F parallèlement à G $s : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 - u_2 \end{cases}$.

17) $-s$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F

18) $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G ssi $s = 2p - \text{Id}$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

19) **Caractérisation des symétries** $s : E \longrightarrow E$ est une symétrie ssi $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{Id}_E$.

Dans ce cas $E = \text{Ker } (\text{Id}_E - s) \oplus \text{Ker } (\text{Id}_E + s)$ et s est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker } (\text{Id}_E - s)$ parallèlement à $G = \text{Ker } (\text{Id}_E + s)$.