

Correction du Test n° 17

Sujet A

1. On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5, que l'on doit ranger dans 5 casiers numérotés de 1 à 5, chaque casier pouvant contenir de 0 à 5 jetons. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements vérifiant les conditions indiquées.

- (a) Choisir un rangement tel que le casier numéro 5 soit vide, revient à choisir, pour chaque jeton, un casier parmi les quatre numérotés de 1 à 4.

Le nombre de ces rangements est donc $4^5 = 1024$.

- (b) Choisir un rangement tel que deux casiers exactement soient occupés, revient à choisir deux casiers parmi les cinq puis à ranger les cinq jetons dans ces deux casiers, sans qu'aucun ne soit vide.

Le nombre de ces rangements est donc $\binom{5}{2} \times (2^5 - 2) = 10 \times 30 = 300$.

2. $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + o(x^3).$$

Par produit de développements limités, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$.

On en déduit que la tangente à \mathcal{C}_f en 0 est la droite T_0 d'équation $y = 1 + x$.

De plus, $f(x) - (1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \leq 0$ et \mathcal{C}_f est en-dessous de T_0 au voisinage de 0.

Correction du Test n° 17

Sujet B

- 1.
2. On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5, que l'on doit ranger dans 5 casiers numérotés de 1 à 5, chaque casier pouvant contenir de 0 à 5 jetons. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements vérifiant les conditions indiquées.

- (a) Choisir un rangement tel que le jeton numéro 1 soit dans le casier numéro 1, revient à mettre ce jeton dans le casier numéro 1 puis à choisir, pour chacun des jetons numérotés de 2 à 4, un casier parmi les cinq casiers.

Le nombre de ces rangements est donc $1 \times 5^4 = 625$.

- (b) Choisir un rangement tel que deux casiers exactement soient occupés, revient à choisir deux casiers parmi les cinq puis à ranger les cinq jetons dans ces deux casiers, sans qu'aucun ne soit vide.

$$\text{Le nombre de ces rangements est donc } \binom{5}{2} \times (2^5 - 2) = 10 \times 30 = 300.$$

3. $f(x) = \frac{x}{1 + e^x}$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x), \text{ donc } f(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2 + x + o(x)} \underset{0}{=} \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2} + o(x) \right) = 0, \text{ et } \frac{1}{1 + u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u).$$

$$\text{Donc, par composition, } f(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} \times \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

On en déduit que \mathcal{C}_f admet pour tangente en 0 la droite $\mathcal{T}_0 : y = \frac{x}{2}$.

De plus, $f(x) - \frac{x}{2} \underset{0}{=} -\frac{x^2}{4} + o(x^2) \leq 0$, au voisinage de 0.

Donc \mathcal{C}_f se situe au dessous de sa tangente \mathcal{T}_0 au voisinage de 0.