

## Correction du devoir maison n° 17

**Exercice 1** On considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_3[X]$  ainsi que les ensembles

$$F = \{P \in E, P(-1) = P'(-1) = 0\} \text{ et } G = \{P \in E, P(1) = P(0)\}?$$

1.  $P \in F \Leftrightarrow P = (X+1)^2(aX+b) = aX(X+1)^2 + b(X+1)^2$  donc

$$F = \text{Vect}((X(X+1)^2, (X+1)^2)) \text{ est un sous espace vectoriels de } E.$$

De plus la famille  $(X(X+1)^2, (X+1)^2)$  est libre car à degrés échelonnés donc c'est une base de  $F$  et  $\boxed{\dim F = 2.}$

$$P \in G \Leftrightarrow P = aX^3 + bX^2 + cX + d \text{ et}$$

$$a+b+c+d = d \Leftrightarrow c = -a-b \Leftrightarrow P = aX^3 + bX^2 + (-a-b)X + d = a(X^3 - X) + b(X^2 - X) + d$$

donc  $G = \text{Vect}(X^3 - X, X^2 - X, 1)$  est un sous espace vectoriels de  $E$ .

De plus la famille  $(X^2(1-X), X(1-X), 1)$  est libre car à degrés échelonnés donc c'est une base de  $G$  et  $\boxed{\dim G = 3.}$

2.  $\dim F + \dim G = 5 \neq \dim E = 4$  donc  $\boxed{F \text{ et } G \text{ ne sont pas supplémentaires dans } E.}$

3.  $P \in F \cap G \Leftrightarrow P = aX(X+1)^2 + b(X+1)^2$  et  $P(0) = b = P(1) = 4(a+b) \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$   
 et  $P = a[X(X+1)^2 - \frac{4}{3}(X+1)^2] = a(X+1)^2 \frac{3X-4}{3}$

$$\boxed{\text{Une base de } F \cap G \text{ est donc } (X+1)^2(3X-4).}$$

4.  $\mathcal{B} = (1, X, (X+1)^2, X(X+1)^2)$  est une famille de  $E$  à degrés échelonnés donc c'est une famille libre de  $4 = \dim E$  vecteurs de  $E$ , c'est donc une base de  $E$ .

5.  $\boxed{\text{Vect}(1, X)}$  est alors un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

6.  $\boxed{\text{Vect}(X)}$  est un supplémentaire de  $G$  dans  $E$  car la famille  $(X^2(1-X), X(1-X), 1, X)$  est une famille de  $E$  à degrés échelonnés donc c'est une famille libre de  $4 = \dim E$  vecteurs de  $E$ , c'est donc une base de  $E$ .

**Exercice 2** Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et quatre vertes numérotées de 1 à 4.

1. On tire successivement et sans remise trois boules.

(a) Il y a  $9 \times 8 \times 7 = \boxed{504}$  tirages au total.

(b) Les tirages bicolores sont composés

soit d'une boule rouge et de deux vertes :  $(5 \times 4 \times 3) \times 3 = 180$  possibilités,

soit de deux boules rouges et d'une verte :  $(5 \times 4 \times 4) \times 3 = 240$ .

Il a donc  $240 + 180 = \boxed{420}$  tirages bicolores.

(c) Le nombre de tirages contenant au plus deux boules rouges est égal au nombre total de tirages moins ceux contenant 3 boules rouges :  $504 - 5 \times 4 \times 3 = \boxed{444}$

(d) Soit le tirage contient la boule rouge n° 3 et 2 vertes non n° 3 :  $(1 \times 3 \times 2) \times 3 = 18$   
(3 rangements possibles)

Soit le tirage contient une boule rouge non n° 3, une verte n° 3 et une verte non n° 3 :  
 $(4 \times 1 \times 3) \times 3! = 72$  (3! rangements possibles)

Il y a donc  $72 + 18 =$

$\boxed{90}$  tirages contenant exactement une boule rouge et une boule portant le numéro 3.

2. On tire successivement et avec remise trois boules.

(a)  $9^3 = 729$       b) une boule rouge et de deux vertes  $(5 \times 4^2) \times 3 = 240$  une boule verte et de deux rouges  $(5^2 \times 4) \times 3 = 300$ . Il a donc  $240 + 300 = \boxed{540}$  tirages bicolores.

c)  $9^3 - 5^3 = 604$       d) la boule rouge n° 3 et 2 vertes non n° 3 :  $(1 \times 3^2) \times 3 = 27$   
une boule rouge non n° 3, une verte n° 3 et une verte non n° 3  $(4 \times 1 \times 3) \times 3! = 72$

Il y a donc  $27 + 72 =$

$\boxed{99}$  tirages contenant exactement une boule rouge et une boule portant le numéro 3.

3. On tire simultanément trois boules.

(a)  $\binom{9}{3} = 84$       b) une boule rouge et deux vertes  $\binom{5}{1} \binom{4}{2} = 30$  une boule verte et deux rouges  $\binom{4}{1} \binom{5}{2} = 40$ . Il a donc  $30 + 40 = \boxed{70}$  tirages bicolores.

c)  $\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 74$       d) la boule rouge n° 3 et 2 vertes non n° 3 :  $1 \times \binom{3}{2} = 3$   
une boule rouge non n° 3, une verte n° 3 et une verte non n° 3  $\binom{4}{1} \times 1 \times \binom{3}{1} = 12$

Il y a donc  $3 + 12 =$

$\boxed{15}$  tirages contenant exactement une boule rouge et une boule portant le numéro 3.