Équations différentielles linéaires

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2xy = \text{sh}\,(x) - 2x\text{ch}\,(x)$ 2. $y' + 3y = 2t + 1$ 3. $y' - 2xy = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.

4. $xy' - y = x^3 - 2x$ sur $]0, +\infty[$ 5. $(x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

6. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1 + \sin(x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $-3y'' - 2y' + y = \sin(t)$ 2. $y'' - y = x^2$ 3. $y'' + y = \cos^2(x)$

Exercice 3 Résoudre, suivant les valeurs du réel m, l'équation différentielle

$$y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^x$$

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}$.

Indication On cherchera une solution particulière de la forme $y_p = zy_0$, où y_0 est une solution non nulle de l'équation homogène.

Exercice 5 **Circuit RLC** On considère l'équation différentielle $(E) : \dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{E}{L}$,

où R, L, C et E sont des constantes réelles strictement positives données, t est la variable et q la fonction inconnue.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur R, L et C pour que l'équation caractéristique de (E) admette des racines réelles. Montrer que ces racines sont nécessairement négatives.

2. Dans cette question, on suppose que $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

   (a) Montrer que les solution de (E) sont de la forme $q : t \mapsto K + A\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t) + B\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)$, où K, α et ω sont des réels à déterminer en fonction de E, R, L et C.

   (b) Étudier la limite de q lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 6 **Oscillateur amorti** On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, où $(k, \omega_0, \omega) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

1. Vérifier que (E) possède une solution particulière $\varphi : t \mapsto a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, où $a \in \mathbb{C}$.
2. ω et k étant fixés, étudier les variations du module de a en fonction de ω_0.
3. Déterminer les solutions complexes de l'équation différentielle (E).

Exercice 7 Soit l'équation différentielle $(E) :\ x^2y'' + axy' + by = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes fixées.

1. Montrer que si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $g = f \circ \exp$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants
$$(F) :\ u'' + (a-1)u' + bu = 0.$$
2. Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (F) sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f = g \circ \ln$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Dans cette question $a = 3$ et $b = 1$. Donner les solutions à valeurs réelles de (F).

   En déduire les solutions à valeurs réelles de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dans cette question $a = 1$ et $b = 4$. Donner les solutions à valeurs réelles de (F).

   En déduire les solutions à valeurs réelles de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.