

Devoir maison n° 19

A rendre le jeudi 9 avril 2026

Exercice 1 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_m : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + mz, x + my + z, mx + y + z) \end{cases}$$

1. Montrer que f_m est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .
3. Dans cette question, $m = -2$.
 - (a) Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f_{-2})$.
 - (b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f_{-2})$.
 - (c) Démontrer que $\text{Ker}(f_{-2})$ et $\text{Im}(f_{-2})$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
 - (d) Écrire l'expression analytique de la projection p sur $\text{Ker}(f_{-2})$ parallèlement à $\text{Im}(f_{-2})$.

Exercice 2 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$.

1. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Dans cette question $a = 5$ et $b = 1$. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Dans cette question $a = 3$ et $b = -3$. Déterminer le rang puis le noyau de φ .