

Correction du devoir maison n° 18

Exercice 1 $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

1. La fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$).

La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables (car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 > 0$).

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme produit de fonctions qui le sont, et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{(x-1)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{x-1} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}, \end{aligned}$$

qui est du signe de $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ car $(x-1)^2\sqrt{x^2+1} > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

φ est dérivable sur \mathbb{R} (fonction polynôme), et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$.

Comme $\varphi(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^3$, on obtient le tableau de variation de φ :

| | | | | | | | |
|---------------|-----------|-----|---------------|-----------|------------------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $\frac{4}{3}$ | $+\infty$ | | | |
| $\varphi'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | | |
| $\varphi(x)$ | $-\infty$ | ↗ | -1 | ↘ | $-\frac{59}{27}$ | ↗ | $+\infty$ |

D'après ce tableau de variation, $\varphi < 0$ sur l'intervalle $] -\infty, \frac{4}{3}[$. De plus, φ est continue

(car dérivable) et strictement croissante sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$ donc, d'après le théorème de la

bijection monotone, φ réalise une bijection de $[\frac{4}{3}, +\infty[$ sur l'intervalle

$\varphi([\frac{4}{3}, +\infty[) = [-\frac{59}{27}, +\infty[$ qui contient 0. L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution dans \mathbb{R} , que l'on note α , et qui vérifie $2, 2 < \alpha < 2, 3$ car $\varphi(2, 2) < 0 < \varphi(2, 3)$.

De ce qui précède, on déduit le tableau de variation de f :

| | | | | | | | | | |
|---------|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|---|-------------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | α | $+\infty$ | | | | | |
| $f'(x)$ | - | | - | 0 | + | | | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ | | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

En effet, $\frac{x}{x-1} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} 1$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{x^2+1} \rightarrow +\infty$.

De plus, $x\sqrt{x^2+1} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} \sqrt{2} > 0$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1^\pm}{\rightarrow} \pm\infty$, par opérations sur les limites.

D'après son tableau de variation, la fonction f admet un unique extremum local qui est un minimum local atteint pour $x = \alpha$.

2. Comme $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, on a : $\sqrt{x^2+1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

De plus, $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ donc $\frac{x}{x-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$.

Par produit de développements limités on obtient : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe

\mathcal{C}_f admet une tangente \mathcal{T}_0 au point $(0,0)$, d'équation $y = -x$.

De plus $f(x) - (-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 + o(x^2) \leq 0$ au voisinage de 0.

Donc \mathcal{C}_f est en-dessous de \mathcal{T}_0 au voisinage de 0.

3. Si $x \rightarrow +\infty$, alors $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ et $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{t(\frac{1}{t}-1)} = \frac{1}{\sqrt{t^2}} \times \frac{\sqrt{t^2+1}}{1-t} \underset{t > 0}{=} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t(1-t)}$.

Donc $f\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) (1 + t + t^2 + o(t^2)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1+t}{t} + 1 + \frac{3t}{2} + o(t)$.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

On en déduit que la courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote \mathcal{D} en $+\infty$, d'équation $y = x + 1$.

De plus $f(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ au voisinage de $+\infty$.

Donc \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{D} au voisinage de $+\infty$.

4. Si $x \rightarrow -\infty$, alors $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^-$ et $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t}-1} = \frac{1}{\sqrt{t^2}} \times \frac{\sqrt{t^2+1}}{1-t} \underset{t < 0}{=} -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t(1-t)}$.

Donc $f\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0^-}{=} -\frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) (1 + t + t^2 + o(t^2)) \underset{t \rightarrow 0^-}{=} -\frac{1}{t} - 1 - \frac{3t}{2} + o(t)$.

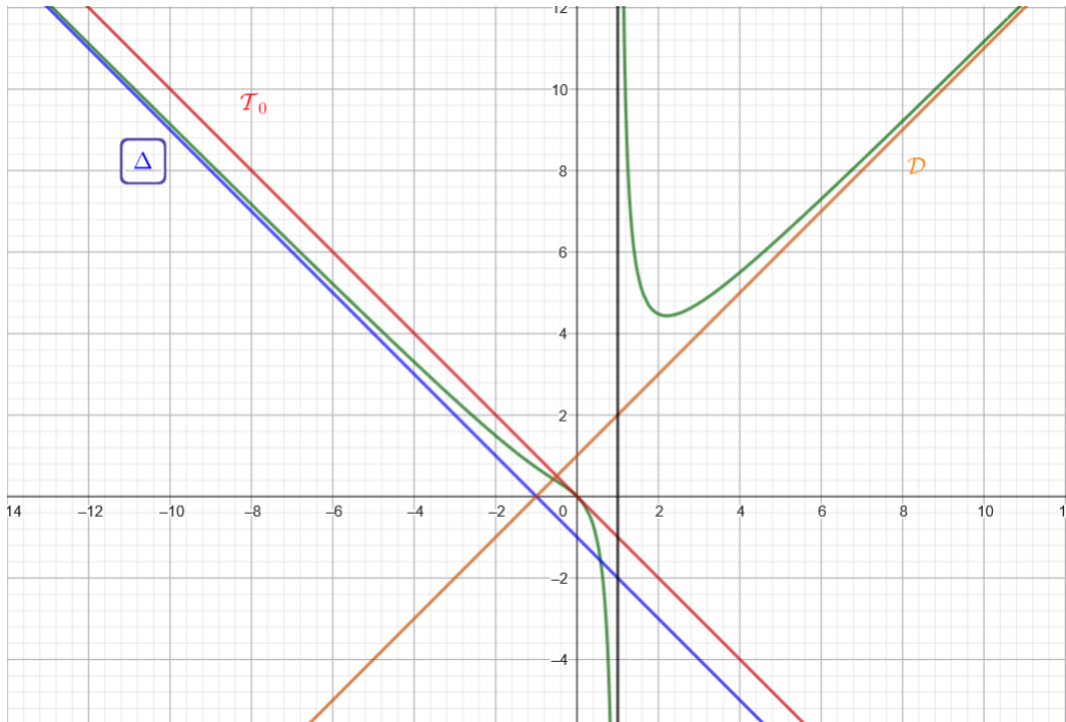
Donc $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -x - 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

On en déduit que la courbe

\mathcal{C}_f admet une asymptote Δ en $-\infty$, d'équation $y = -x - 1$.

De plus $f(x) - (-x - 1) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -\frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ au voisinage de $-\infty$.

Donc \mathcal{C}_f est au-dessus de Δ au voisinage de $-\infty$.



Exercice 2 On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$

1. $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^* donc f existe si $0 \notin [x, x^2]$ ce qui est la cas pour $x > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Si on note G une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* , $f(x) = G(x^2) - G(x)$ donc

$$f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2x \frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x}$$

2. Sur $[1, +\infty[$, $x \leq x^2$ et $\frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$ donc

$$f(x) \geq \int_x^{x^2} \frac{e}{t} dt = e(\ln(x^2) - \ln x) = e \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Sur $]0, 1]$, $x \geq x^2$ et $\frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{t}$ donc $f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = \ln(x^2) - \ln x = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

4. f' est du signe de $2e^{x^2} - e^x$ sur \mathbb{R}_+^*

$$\text{Or } 2e^{x^2} - e^x \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x^2-x} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 - x + \ln 2 \geq 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2^4}\right) < 0 \text{ donc } f' \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+^*.$$

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

5. On pose $x = 1 + u$ avec $u \rightarrow 0$.

$$f'(x) = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x} = \frac{2e^{1+2u+u^2} - e^{1+u}}{1+u} = e \frac{2e^{2u+u^2} - e^u}{1+u}$$

$$e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$e^{2u+u^2} \underset{0}{=} 1 + 2u + u^2 + \frac{4u^2}{2} + o(u^2) = 1 + 2u + 3u^2 + o(u^2)$$

$$2e^{2u+u^2} - e^u \underset{0}{=} 1 + 3u + \frac{11u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2) \text{ d'où}$$

$$f'(x) \underset{u \rightarrow 0}{=} e \left(1 + 2u + \frac{7u^2}{2} + o(u^2) \right) \underset{x \rightarrow 1}{=} e \left(1 + 2(x-1) + \frac{7(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) \right)$$

puis en primitivant entre 1 et x , avec $f(1) = 0$ on obtient

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} e \left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{7(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3) \right)$$

6. Une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f en 1 est $y = e(x-1)$

$(x-1) \geq 0$ pour tout x , donc \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{T} au voisinage de 1.