Correction des exercices école ouverte

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$ et $F = \{(a, 2b - a, b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. $u \in E \Leftrightarrow u = (2y - z, y, z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)$ donc $E = \text{Vect}\ ((2,1,0),(-1,0,1))$ et $F = \text{Vect}\ (1,-1,0),(0,2,1))$ sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 car ces vecteurs ne sont pas colinéaires et $((2,1,0),(-1,0,1))$ est une base de E, $(1,-1,0),(0,2,1))$ est une base de F.
2. E et F étant des plans distincts de $\mathbb{R}^3$, leur intersection est une droite
   $(2,1,0) \wedge (-1,0,1) = (1,-2,1)$ est un vecteur normal à E
   $(1,-1,0) \wedge (0,2,1) = (-1,-1,2)$ est un vecteur normal à F
   $(1,-2,1) \wedge (-1,-1,2) = (-3,-3,-3)$ est un vecteur directeur de $E \cap F$
3. $\mathscr{B} = ((1,1,1),(0,1,2),(1,-1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car c'est une famille libre (à vérifier) de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que $(1,1,1) \in E \cap F$, $(0,1,2) \in E$ et $(1,-1,0) \in F$.

Exercice 2 Déterminer le rang de $\mathscr{F} = (u,v,w)$ et déterminer si $\mathscr{F}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$:

1. $u = (1,0,1),\ \ v = (-1,2,3),\ \ w = (1,2,5) = 2u + v$
   $\boxed{\text{rg } \mathscr{F} = 2 \text{ et } \mathscr{F} \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$
2. $u = (1,0,1),\ \ v = (-1,2,3),\ \ w = (1,2,-1)$ $\boxed{\text{rg } \mathscr{F} = 3 \text{ et } \mathscr{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

Exercice 3 Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. La fonction nulle appartient à F et $\forall f, g \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = 0$ et $(f + \lambda g)'(0) = f'(0) + \lambda g'(0) = 0$ donc $f + \lambda g \in F$ et
   $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
2. Soit G l'ensemble des fonctions affines.
   $f \in G \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ donc $G = \text{Vect}\ (f_1, f_2)$ où f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x$ et f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = 1$ donc
   $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$
3. $f \in F \cap G \Leftrightarrow f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = b = 0, f'(0) = a = 0$ donc $f = 0$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
   De plus, $\forall f \in E, f(x) = \underbrace{f(x) - (f(0) + xf'(0))}_{\in F} + \underbrace{f(0) + xf'(0)}_{\in G}$ donc $E = F + G$ et finalement $\boxed{E = F \oplus G.}$

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z=0\right\}$ et $G = \text{Vect}\left\{(1,1,1)\right\}$.

1. $u=(x,y,z) \in F \Leftrightarrow u=(z-y,y,z) = y(-1,1,0)+z(1,0,1)$ donc $F = \text{Vect}$ $((-1,1,0),(1,0,1))$ donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^3.}$
2. $\dim F = 2$ car $(-1,1,0)$ et $(1,0,1)$ ne sont pas colinéaires et $\dim G = 1$ donc $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$.

   De plus $u \in F \cap G \Leftrightarrow u = (a,a,a)$ avec $a+a-a=0$ d'où $a=0$ et $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

   Finalement $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$
3. $(2,2,3) = a(-1,1,0)+b(1,0,1)+c(1,1,1) \Leftrightarrow a=-1, b=0$ et $c=3$ (à résoudre).
4. $(x,y,z) = a(-1,1,0)+b(1,0,1)+c(1,1,1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z \\ -x-y+2z \\ x+y-z \end{pmatrix}$ en inversant la matrice à l'aide de Gauss Jordan par exemple.

Exercice 5 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \left\{f \in E, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$.

1. La fonction nulle vérifie $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$ donc elle appartient à F.

   De plus, $\forall f,g \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_0^1 (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$ donc $f + \lambda g \in F$ et $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$
2. Soit G le sous espace vectoriel de E engendré par la fonction constante égale à 1, c'est-à-dire l'espace des fonctions de E constantes.

   $f_i n F \cap g \Leftrightarrow f(x) = c, \forall x \in [0,1]$ et $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = c = 0$ donc $F \cap G = \{0_E\}$.

   De plus, $\forall f \in E, f(x) = \underbrace{f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}_{\in F} + \underbrace{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}_{\in G}$ donc $E = F+G$ et finalement

   $\boxed{E = F \oplus G.}$

Exercice 6 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à deux.

1. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $P' = 2aX+b$, et on a :

   $$P \in E \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} P(-1) & = & 0 \\ P'(-1) & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & 0 \\ -2a & + & b & & & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & a \\ b & = & 2a \end{array}\right.$$

   Donc $E = \left\{aX^2+2aX+a,\ a \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a(X+1)^2,\ a \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left((X+1)^2\right)$, qui est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par $(X+1)^2 \neq 0$.

Donc $\boxed{E \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}_2[X]\text{, de base } ((X+1)^2)\text{, et de dimension } 1}$.

2. (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
aX^2 + b(X+1)^2 + c(X+2)^2 = 0 &\iff (a+b+c)X^2 + (2b+4c)X + (b+4c) = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & = & 0 \\ & & b & + & 4c & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & = & 0 \\ & & & & 4c & = & 0 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array}\right. \\
&\iff a = b = c = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}'$ est une famille libre de 3 éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3.

Donc $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$, et $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\,((X+1)^2) \oplus \text{Vect}\,(X^2, (X+2)^2)$.

Donc $\boxed{E \text{ et Vect } (X^2, (X+2)^2) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_2[X]}$.

(b) $X^2 - 2(X+1)^2 + (X+2)^2 = X^2 - 2X^2 - 4X - 2 + X^2 + 4X + 4 = 2$.

Donc $\boxed{1 = \frac{1}{2}X^2 - (X+1)^2 + \frac{1}{2}(X+2)^2}$.

$(X+2)^2 - (X+1)^2 - 3 = X^2 + 4X + 4 - X^2 - 2X - 1 - 3 = 2X$.

Donc $X = \frac{1}{2}(X+2)^2 - \frac{1}{2}(X+1)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}X^2 - (X+1)^2 + \frac{1}{2}(X+2)^2\right)$.

Donc $\boxed{X = -\frac{3}{4}X^2 + (X+1)^2 - \frac{1}{4}(X+2)^2}$.

(c) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$P = aX^2 + b\left(-\frac{3}{4}X^2 + (X+1)^2 - \frac{1}{4}(X+2)^2\right) + c\left(\frac{1}{2}X^2 - (X+1)^2 + \frac{1}{2}(X+2)^2\right)$.

Donc $\boxed{Mat_{\mathscr{B}'}(P) = \begin{pmatrix} a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}c \\ b - c \\ -\frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}}$.

Exercice 7 $H = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; (1-X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0\right\} \subset \mathbb{R}[X]$.

1. Si $P = 0$ alors $P'' = P' = 0$ et $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0$. Donc $\underline{0_{\mathbb{R}[X]} \in H}$.

   Soient $P, Q \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} & (1 - X^2)(\lambda P + \mu Q)'' - 3X(\lambda P + \mu Q)' + 15(\lambda P + \mu Q) \\ = \ & \lambda \underbrace{\left((1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P\right)}_{=0 \text{ car } P \in H} + \mu \underbrace{\left((1 - X^2)Q'' - 3XQ' + 15Q\right)}_{=0 \text{ car } Q \in H} = 0. \end{aligned}$$

   Donc $\lambda P + \mu Q \in H$ et $\underline{H \text{ est stable par combinaison linéaire}}$.

   Donc $\boxed{H \text{ est bien un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $a_n \neq 0$.

   Si $n = 0$, $P' = P'' = 0$ et $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 15a_0 \neq 0$. Dans ce cas, $P \notin H$.

   Si $n = 1$, $P' = a_1$, $P'' = 0$ et $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 12a_1X + 15a_0 \neq 0$. Dans ce cas, $P \notin H$.

   Si $n \geq 2$, le terme de plus haut degré de $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P$ est

$$-n(n-1)a_nX^2X^{n-2} - 3na_nXX^{n-1} + 15a_nX^n = (-n^2 - 2n + 15)a_nX^n.$$

   Si $P \in H$ alors $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0$ et donc $-n^2 - 2n + 15 = 0$, car $a_n \neq 0$.

   L'équation $-x^2 - 2x + 15 = 0$ a pour racines évidentes $3 \in \mathbb{N}$ et $-5 \notin \mathbb{N}$.

   Donc $\boxed{\text{si } P \in H \text{ est non nul alors son degré est } n = 3}$.

3. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a : $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$.

$$\begin{aligned} & P \in H \\ \iff \ & (1 - X^2)(6aX + 2b) - 3X(3aX^2 + 2bX + c) + 15(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \\ \iff \ & 7bX^2 + (6a + 12c)X + (2b + 15d) = 0 \\ \iff \ & b = d = 0 \text{ et } a = -2c \\ \iff \ & P = -2cX^3 + cX = c(-X^3 + X). \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{H = \text{Vect}(P_1), \text{ avec } P_1 = -X^3 + X}$.

Exercice 8

1. On a $A0_2 - 0_2A = 0_2$, donc $0_2 \in \mathcal{C}(A)$.

   Soient $M, N \in \mathcal{C}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$A(\lambda M+\mu N)-(\lambda M+\mu N)A=\lambda\underbrace{(AM-MA)}_{=0_2 \text{ car } M\in\mathcal{C}(A)}+\mu\underbrace{(AN-NA)}_{=0_2 \text{ car } N\in\mathcal{C}(A)}=0_2.$$

Donc $\lambda M+\mu N\in\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires.

Finalement, $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $AM=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-c & b-d\end{pmatrix}$ et $MA=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d\end{pmatrix}$.

Donc $M\in\mathcal{C}(A)\iff AM=MA\iff\begin{cases} a+c &= a+b \\ b+d &= a-b \\ a-c &= c+d \\ b-d &= c-d\end{cases}\iff\begin{cases} c &= b \\ d &= a-2b\end{cases}$.

Donc $M\in\mathcal{C}(A)\iff M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-2b\end{pmatrix}\iff M=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\mathcal{C}(A)=\text{Vect}(I_2,J), \text{ où } J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\end{pmatrix}}$.

3. Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $x,y,z,t\in\mathbb{R}$. On a :

$$(xI_2+yJ)+(zK+tL)=\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ y & x-2y\end{pmatrix}.$$

Donc $M=(xI_2+yJ)+(zK+tL)\iff\begin{cases} x+z &= a \\ y+t &= b \\ y &= c \\ x-2y &= d\end{cases}\iff\begin{cases} z &= a-2c-d \\ t &= b-c \\ y &= c \\ x &= 2c+d\end{cases}$.

Donc toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de $\mathcal{C}(A)$ et d'une matrice de $\text{Vect}(K,L)$.

Donc $\boxed{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\mathcal{C}(A)\oplus\text{Vect}(K,L)}$.

2 Dénombrement

Exercice 1 Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. On suppose qu'un élève choisit une entrée, un plat et un dessert.

   On peut constituer $4\times3\times5=60$ menus différents.

2. Si un élève ne mange pas de dessert il a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées.
   Il a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3 = 18$ possibilités pour constituer son menu s'il prend deux entrées différentes.

   S'il choisit aussi de manger deux fois la même entrée, il faut ajouter les 4 possibilités de prendre deux entrées identiques ce qui donne $4 \times 3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3 = 30$ menus possibles.

3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite.
   Ils ont $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \times 3 \times 10 = 180$ menus possibles.

Exercice 2 Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne.
Il y a au total $13^4 = 28\,561$ tirages possibles .

1. Au moins une boule blanche a été tirée.

   On utilise le complémentaire : Aucune boule blanche n'a été tirée, autrement dit 4 boules noires ont été tirées ce qui fait 8^4 possibilités.

   Donc il y a $13^4 - 8^4 = 24\,465$ tirages avec au moins une boule blanche.

2. Une boule noire au plus a été tirée.

   0 boule noire : 5^4

   1 boule noire exactement : $5^3 \times 8 \times 4$

   Donc il y a $5^4 + 5^3 \times 8 \times 4 = 4\,625$ tirages avec au plus une boule noire.

3. $8^3 \times 5 = 2\,560$ tirages comportent trois boules noires et une boule blanche dans et ordre.

4. $8^2 \times 5^2 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 9\,600$ tirages comportent deux boules noires et deux boules blanches.

Exercice 3 Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire simultanément cinq au hasard.
Il y a au total $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages possibles.

1. Au moins un atout est un multiple de cinq ?

   Il y a 4 atouts multiples de 5, donc 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, et $\begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc
   $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages avec au moins un multiple de 5.

2. Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?

   Il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents.

   Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, 3 atouts multiples de 5 sans le 15 et 6 atouts multiples de 3 sans le 15 on a
   $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \times 6 \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ tirages possibles.

3. On a tiré le 1 ou le 21 ?

   Ni le 1, ni le 21 : $\begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Par passage au complémentaire, il reste donc
   $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages avec le 1 ou le 21.

Exercice 4 De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex aequo ?

• s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.

• s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.

• s'il y a trois ex æquo, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2 = 8$ classements car il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).

• s'il y a deux ex æquo, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3! = 36$

• s'il y a deux fois deux ex æquo, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ classements car il suffit de choisir les deux ex æquo de la première place.

Il y a donc $\boxed{\text{au total 75 classements possibles.}}$

3 Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\tan x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$

2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{5}{6}}$

3. $\ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$

4. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2+e^{-2n}+\sqrt{n^5}}{\ln(2n)+2n-3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\frac{5}{2}}}{2n} = \dfrac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ car $\ln(2n) \underset{n\to+\infty}{=} o(2n)$

$n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\frac{5}{2}})$ et $e^{-2n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\frac{5}{2}})$

2. $u_n = (n+3\ln(n))e^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{-(n+1)}$

3. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^2+1\right)}{n^2+1} = \dfrac{\ln(n^2)+\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{n^2}$

4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$

5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \sqrt{n^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right) =$
$\sqrt{n^2}\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

Exercice 3

1. $f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)$ au voisinage de 0 . Développement limité de f à l'ordre 2 en 0 :

   $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ en 0 avec $u = x+x^2, u^2 = x^2+o(x^2)$

   $\ln(1+x+x^2) = x+x^2-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2) = \boxed{x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}$

   La courbe admet donc en 0 une tangente d'équation $y = x$, et le terme suivant du développement limité étant toujours positif au voisinage de 0, la courbe sera située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0 . Développement limité de f à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{e^x-1} &= \frac{x}{x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)} \\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{4}+o(x^2) \\ &= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2) \end{aligned}$$

   en appliquant $\dfrac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o(u^2)$ en 0 avec $u = \dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+o(x^2), u^2 = \dfrac{x^2}{4}+o(x^2)$.

   La courbe admet une tangente d'équation $y = -\dfrac{x}{2}+1$ et elle est située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0 car $\dfrac{x^2}{12} \geqslant 0$ pour tout x.

3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$. Pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{2}{\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{1}{t}+1} - \sqrt{\frac{1}{t}-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}}\left(2 - \sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}\right) \\
&\underset{t\to+0}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}\left[2 - \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) - \left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) + o(t^2)\right] \\
&= \frac{t^2}{4\sqrt{t}} + o\left(\frac{t^2}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).}$

La courbe admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$ et elle est située au-dessus de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ car $\frac{1}{4x\sqrt{x}} \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

4. $f(x) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$. Pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t(1+\mathrm{e}^t)} \underset{t\to+0}{=} \frac{1}{t}\frac{1}{2+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)} \\
&\underset{t\to+0}{=} \frac{1}{2t}\frac{1}{1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{12}+o(t^3)} \\
&\underset{t\to+0}{=} \frac{1}{2t}\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{4} - \frac{t^3}{8} + o(t^3)\right) \\
&= \frac{1}{2t}\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{24} + o(t^3)\right)
\end{aligned}$$

en appliquant $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ en 0 avec

$u = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{12} + o(t^3), u^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{2t^3}{8} + o(t^3) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{4} + o(t^3), u^3 = \frac{t^3}{8} + o(t^3)$

Donc $\boxed{f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).}$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ en $+\infty$ et elle est située au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\frac{1}{48x^2} \geqslant 0$ pour tout x.

5. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$. Pour tout $t > 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right)$$
$$\frac{t}{1+t} \underset{t\to+0}{=} t(1-t+t^2+o(t^2)) = t - t^2 + t^3 + o(t^3)$$

En utilisant $\arctan u = u - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$ avec $u = t - t^2 + t^3 + o(t^3), u^3 = t^3 + o(t^3)$ on a

$$\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right) \underset{t\to+0}{=} t - t^2 + t^3 - \frac{t^3}{3} + o(t^3) = t - t^2 + \frac{2t^3}{3} + o(t^3)$$

donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - 1 + \dfrac{2}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x-1$, et elle est située au-dessus cette l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\dfrac{2}{3x} \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

4 Applications linéaires

Exercice 1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2y - 2z, x + y - 2z, x - y)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. $f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z$ donc $\ker f = \mathrm{Vect}\ ((1, 1, 1))$.

   $f(1, 0, 0) = (0, 1, 1) = u_1 \quad f(0, 1, 0) = (2, 1, -1) = u_2 \quad f(0, 0, 1) = (-2, -2, 0) = u_3$

   Or $u_1 + u_3 = -u_2$ donc $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}\ (u_1, u_3) = \mathrm{Vect}\ ((0, 1, 1); (1, 1, 0))$

   f n'est donc pas injective ni surjective et a fortiori, f n'est pas bijective.
3. $u \in \ker f \cap \mathrm{Im}\ f \Leftrightarrow u = (x, x, x) = a(0, 1, 1) + b(1, 1, 0) = (b, a + b, a) \Leftrightarrow x = a = b = 0$, donc $\ker f \cap \mathrm{Im}\ f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

   De plus, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\ f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\ker f$ et $\mathrm{Im}\ f$ sont bien supplémentaires.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$ où a est un nombre complexe fixé et $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(z+\lambda z') = z+\lambda z' + a\overline{(z+\lambda z')} = z + a\overline{z} + \lambda z' + a\lambda\overline{z'} = f(z) + \lambda f(z')$.
   donc f est linéaire.
2. $f(z) = 0 \Leftrightarrow z + a\overline{z} = 0$. En notant
   $z = x + \mathrm{i}y, a = b + \mathrm{i}c, f(z) = x + \mathrm{i}y + (b + \mathrm{i}c)(x - \mathrm{i}y) = x + bx + cy + \mathrm{i}(y + cx - by)$

$f(z)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}(1+b)x+cy & = & 0\\ cx+(1-b)y & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ où
$A=\begin{pmatrix}(1+b) & c\\ c & (1-b)\end{pmatrix}$

• Si det $A \neq 0$ alors la matrice A est inversible et la seule solution de ce système est le vecteur nul. Or det $A=1-b^2-c^2=1-|a|^2$

Donc, Si a n'est pas de module 1, ker $f=\{0\}$ et l'application est injective.

f est alors bijective car c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.

• Si $|a|=1$ alors $b^2+c^2=1$ et $(1+b)x=-cy \Leftrightarrow cx=-\dfrac{c^2}{1+b}y$ à condition que $b\neq -1$ i.e $a\neq -1$

On obtient alors $cx=\dfrac{b^2-1}{1+b}y=(b-1)y$ et la deuxième équation est vérifiée.

Donc ker $f=$ Vect $\left(-\dfrac{c}{1+b}+\mathrm{i}\right)$

Dans le cas particulier où $a=-1$, le système se résume à $2y=0$ et ker $f=\mathbb{R}$.

Si $|a|=1$ f n'est alors pas injective et une CNS pour que f soit bijective est $|a|\neq 1$

Exercice 3 on note f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=\dfrac{1}{2}\,z+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,\overline{z}$

1. $f(z)\in\mathbb{C}, \forall z\in\mathbb{C}$ et $\forall z,z'\in\mathbb{C}, \forall\lambda\in\mathbb{R}, f(z+\lambda z')=\dfrac{1}{2}(z+\lambda z')+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,\overline{(z+\lambda z')}=$ $\dfrac{1}{2}\,z+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,\overline{z}+\lambda\left(\dfrac{1}{2}\,z'+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,\overline{z'}\right)=f(z)+\lambda f(z')$.
   Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. $f^2(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\,z+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,\overline{z}\right)+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\,\overline{z}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,z\right)=f(z)$ donc f est un projecteur.
3. On pose $z=x+\mathrm{i}y, f(z)=\dfrac{x+y}{2}+\mathrm{i}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x+y}{2}(1+\mathrm{i})$ et Im $f=$ Vect $(1+\mathrm{i})$

   $f(z)=0\Leftrightarrow y=-x$ donc Ker $f=$ Vect $(1-\mathrm{i})$

Exercice 4 On note $E=\mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par $\forall P\in E, \varphi(P)=2P-(X-1)P'$

1. Si $P\in E$, on sait que deg $(P)\leqslant 2$, donc deg $(P')\leqslant 1$, et deg $((X-1)P')\leqslant 2$.

   Quand on soustrait deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2, le résultat l'est aussi, ce qui prouve que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   On démontre que φ est linéaire (à faire) et φ est bien un endomorphisme de E.

2. Soit $P=aX^2+bX+c\in E$, alors $\varphi(P)=2aX^2+2bX+2c-(X-1)(2aX+b)=$ $2aX^2+2bX+2c-2aX2+2aX-bX+b=(b+2a)X+2c+b$.

   $\varphi(p)=0\Leftrightarrow b+2a=2c+b=0$, soit $c=a=-\dfrac{b}{2}$

   On en déduit que ker(φ) $=$ Vect (X^2-2X+1) et Ker (φ) est une droite vectorielle.

   φ n'est pas injective puisque son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

3. On peut calculer les images des polynômes de la base canoniques :
   $\varphi(1) = 2, \varphi(X) = 2X - (X-1) = X+1$ et $\varphi(X^2) = 2X^2 - 2X(X-1) = 2X$.
   On peut alors dire que $\text{Im}\ (\varphi) = \text{Vect}\ (2, X+1, 2X) = \text{Vect}\ (2, 2X) = \text{Vect}\ (1, X)$.
4. $\ker\ (\varphi) \cap \text{Im}\ (\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_{[X]}}\}$ car les polynômes de l'image sont tous de degré inférieur ou égal à 1, alors que ceux du noyau (hormis le polynôme nul) sont de degré 2. Puisque les dimensions respectives du noyau et de l'image sont de 1 et de 2, et que $\dim\ (E) = 3$, cela suffit à prouver que $\ker\ (\varphi)$ et $\text{Im}\ (\varphi)$ sont bien supplémentaires.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\ker\ (\varphi)$ de parallèlement à $\text{Im}\ (\varphi)$.
   $\varphi \circ p = 0$ car p est la projection sur $\ker\ (\varphi)$, $p(P) \in \ker\ (\varphi), \forall P \in E$
   $p \circ \varphi = 0$ car la projection p est parallèlement à $\text{Im}\ (\varphi)$ donc $\ker\ p = \text{Im}\ \varphi$

Exercice 5 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces vectoriels $F = \text{Vect}\ ((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z); 2x + y - z = 0\}$.

1. Les sous-ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\dim\ F = 1$ et
   $u = (x,y,z) \in G \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow y = z - 2x \Leftrightarrow u = (x, z-2x, z) =$
   $x\underbrace{(1,-2,0)}_{=u_1} + z\underbrace{(0,1,1)}_{=u_2}$
   u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc forment une base de G et $\dim\ G = 2$.
   On a alors $\boxed{\dim\ E = \dim\ F + \dim\ G}$
   L' intersection de F et G est constituée des vecteurs de la forme (a,a,a) vérifiant $2a + a - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $\boxed{F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$ puis $\boxed{E = F \oplus G.}$
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G.
   Il faut écrire la décomposition de tout vecteur u de E en somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G, ce qui peut être fait à la question 1 et évite de déterminer les dimensions de F et G.
   $u = (x,y,z) = \underbrace{a(1,1,1)}_{=u_F} + \underbrace{b(1,-2,0) + c(0,1,1)}_{=u_G} \Leftrightarrow$
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a+b \\ y & = & a-2b+c \\ z & = & a+c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & x-a \\ c & = & z-a \\ y & = & a-2x+2a+z-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2}(2x+y-z) \\ b & = & \frac{1}{2}(-y+z) \\ c & = & \frac{1}{2}(-2x-y+3z) \end{array}\right.$$
   Puis $\boxed{p(u) = u_F = a(1,1,1) = \frac{1}{2}(2x+y-z)(1,1,1)}$
3. Soit s la symétrie par rapport à G parallèlement à F.
   $\boxed{s(x,y,z) = u_G - u_F = (b-a, c-a-2b, c-a) = (-x-y+z, -2x+z, -2x-y+2z)}$

Exercice 6 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2x+y+z}{3}, \frac{x+2y-z}{3}, \frac{x-y+2z}{3}\right)$$

On vérifie que f est linéaire (à faire) et on a $f(u) \in \mathbb{R}^3, \forall u \in \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

$f^2(x,y,z) = f\left(\dfrac{2x+y+z}{3}, \dfrac{x+2y-z}{3}, \dfrac{x-y+2z}{3}\right) =$

$\dfrac{1}{9}(2X+Y+Z, X+2Y-Z, X-Y+Z)$

avec $X = 2x+y+z, Y = x+2y-z$ et $Z = x-y+2z$

$2X+Y+Z = 4x+2y+2z+x+2y-z+x-y+2z = 6x+3y+3z$

$X+2Y-Z = 2x+y+z+2x+4y-2z-x+y-2z = 3x+6y-3z$

$X-Y+Z = 2x+y+z-x-2y+z+2x-2y+4z = 3x-3y+6z$

et $f^2(x,y,z) = f(x,y,z)$. f est alors un projecteur.

Pour déterminer son noyau, on résout le système (en multipliant tout par 3) :

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ x+2y-z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ y &= z \end{cases} \Leftrightarrow -x = y = z \;\boxed{\text{Ker } f = = \text{Vect }((1,-1,-1))}$$

Pour l'image on calcule les images des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et on obtient $\text{Im } f = \text{Vect}(\underbrace{(2,1,1)}_{=f(e_1)}; \underbrace{(1,2,-1)}_{=f(e_2)})$. en remarquant que $f(e_1) = f(e_2) + f(e_3)$

f est alors la projection sur le plan engendré par $(1,2,-1)$ et $(2,1,1)$ parallèlement à la droite engendrée par $(1,-1,-1)$