

Stage : vacances de printemps

Solution de l'exercice 1 : Le microscope classique

Q.1 Les conditions de Gauss sont :

1. Les rayons lumineux sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.
2. Les rayons lumineux sont proches de l'axe optique.

Q.2 Soit la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$, on a la relation suivante :

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 O_2} = f'_1 + \Delta + f'_2 = D_0 \quad (1)$$

On a alors la relation suivante : $\Delta = D_0 - f'_1 - f'_2$. AN : $\Delta = 40 \text{ mm}$.

Q.3 Pour être vu au repos par l'œil, l'image définitive $A'B'$ doit être située à l'infini.

Q.4 Pour former une image définitive à l'infini, on : $A_1 B_1 \rightarrow A'_\infty B'_\infty$ donc l'image intermédiaire doit être dans le plan focal objet de l'oculaire.

On a alors $A_1 = F_2$ et B qui est dans le plan focal objet de la lentille numéro deux.

Q.5 Soit $\overline{O_1 A} = -d$. L'image de A à travers L_1 donne $A_1 = F_2$. On utilise alors la relation de conjugaison de Newton de L_1 :

$$\overline{F_1 A} \times \overline{F'_1 A_1} = -(f'_1)^2 \implies (\overline{F_1 O_1} + \overline{O_1 A}) \times \overline{F'_1 F_2} = -(f'_1)^2 \implies (f'_1 - d) \times \Delta = -(f'_1)^2$$

On obtient alors l'expression de d : $d = \frac{(f'_1)^2}{\Delta} + f'_1$. AN : $d \approx 12,5 \text{ mm}$.

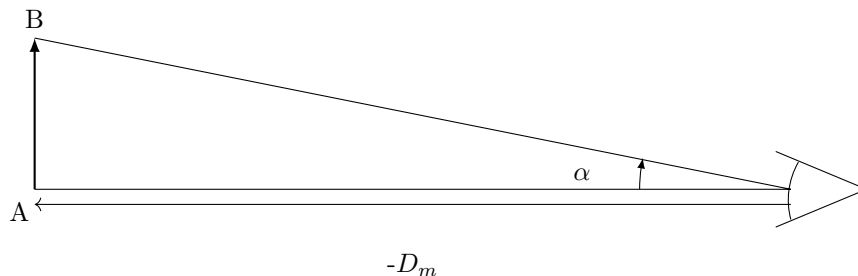
Q.6 Soit la relation du grandissement γ_1 de l'objectif. On a $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} = \frac{f'_1 + \Delta}{-d}$ On a donc $\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f'_1}$.

On a l'application numérique suivante : AN : $\gamma_1 = -4$.

Q.7 Le grossissement angulaire est défini comme : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

Avec α' le diamètre apparent de l'image définitive, et α le diamètre apparent de l'objet vu sans le microscope.

Le diamètre apparent α d'un objet vu à une distance fini correspond au diamètre apparent maximum qu'on peut avoir à l'œil nu d'un objet en le voyant net. Cela correspond au diamètre apparent d'un objet vu à une distance minimum qui correspond au P.P.



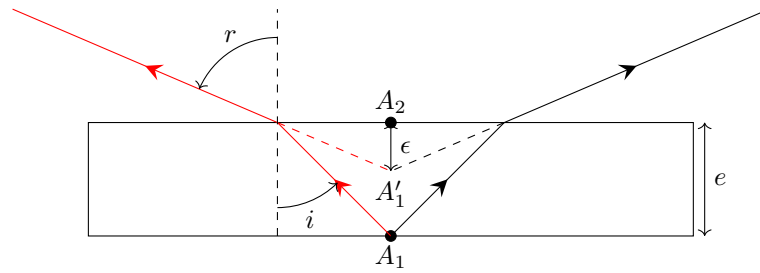
Dans les conditions de Gauss, on a $\alpha \ll 1$ et $\alpha' \ll 1$ on a donc d'après le schéma sur le document Annexe :

$$\tan(\alpha') = \frac{\overline{A_1 B_1}}{-f'_2} \approx \alpha'. \text{ D'après le schéma de la question précédente, on a } \tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{-D_m} \approx \alpha.$$

On a alors : $G = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} \frac{D_m}{f'_2} = \gamma_1 \frac{D_m}{f'_2}$. On obtient donc : $G = -\frac{\Delta D_m}{f'_1 f'_2}$.

L'application numérique donne : AN : $G = -40$

Q.8 L'objet A_2 est vu à travers le microscope à sa véritable place. L'objet A_1 est vu à une position virtuelle A'_1 qui est à l'intersection des rayons émergent de la lame de verre.



La distance $\epsilon = \overline{A'_1 A_2}$, soit : $\epsilon = e \frac{\tan(i)}{\tan(r)}$

Dans les conditions de Gauss : $i \ll 1$ et $r \ll 1$ soit $\tan(i) \simeq i$ et $\tan(r) \simeq r$

La loi de la réfraction donne : $n \sin(i) = \sin(r)$ dans les conditions de Gauss $ni \simeq r$

On obtient alors : $\epsilon = \frac{e}{n}$

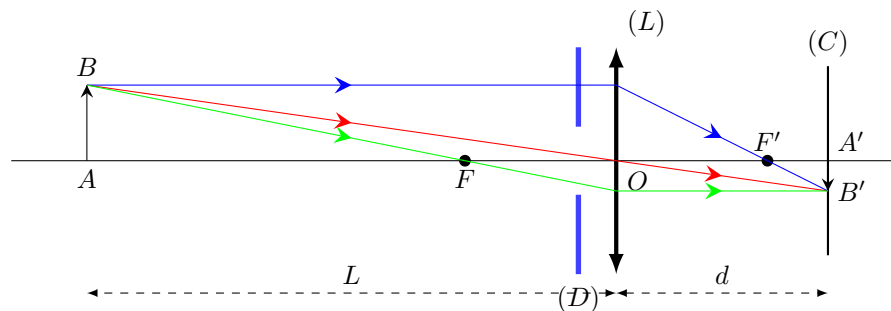
Solution de l'exercice 2 : Optique de l'appareil photo

Q.1 a) Conditions de Gauss :

- Rayons proches de l'axe optique ;
- angle faible avec l'axe optique.

b) Le diaphragme (D) sélectionne les rayons paraxiaux qui forment une image sur le capteur (C).

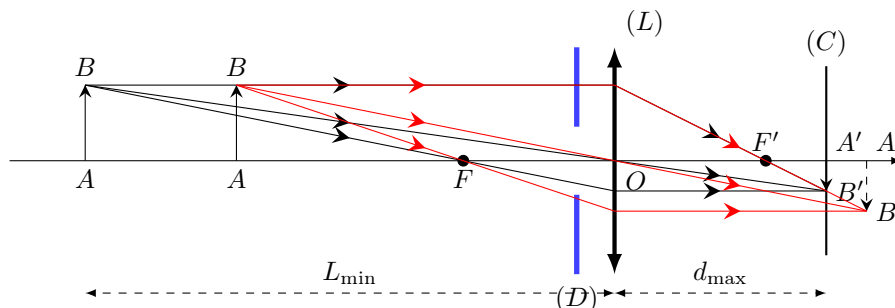
Q.2 a) On considère le schéma suivant :



b) Soit $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ avec $\overline{OA} = -L$ et $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} \simeq \frac{1}{f'}$ \Rightarrow $\overline{A'B'} \simeq -\frac{hf'}{L}$ AN : $\overline{A'B'} \simeq -12,5 \text{ mm}$

Q.3 a) Si $L \rightarrow +\infty$ $d = d_{\min} = f'$

b) Si $d = d_{\max}$ alors :



c) Soit $\overline{OA'} = d_{\max}$ et $\overline{OA} = -L_{\min} \Rightarrow \frac{1}{d_{\max}} + \frac{1}{L_{\min}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow L_{\min} = \frac{f' d_{\max}}{f' - d_{\max}}$

d) AN : $L_{\min} = 55 \text{ cm}$

Solution de l'exercice 3 : Modélisation du mouvement d'une plateforme en mer :

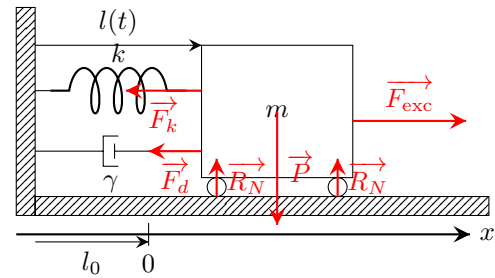
Q.1 Système : $\{M(m)\}$ plateforme en mer assimilé à un point matériel.

Référentiel : Le référentiel terrestre supposé galiléen noté.

Repérage : cartésien unidimensionnel selon l'axe (Ox) .

Bilan des forces :

- le poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$;
- la réaction normale : $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_y$;
- la force de rappel : $\vec{F}_k = -k(l(t) - l_0)\vec{u}_x$;
- force de frottements fluides :
 $\vec{F}_d = -\gamma\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = -\gamma\dot{x}\vec{u}_x$ avec $\gamma > 0$;
- force excitatrice sinusoïdale :
 $\vec{F}_{exc} = F_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x$;



Il apparaît sur le schéma : $l(t) = l_0 + x(t)$ puisque la position d'équilibre de la masse est prise en $x = 0$.

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_k + \vec{F}_d + \vec{F}_{exc} = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$

Par projection selon (Ox) : $-k(l(t) - l_0) - \gamma\dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m\ddot{x}$ (11)

\vec{P} et \vec{R}_N n'interviennent pas dans l'équation du mouvement (elles se compensent).

Q.2 Dans ce cas $\vec{F}_d = \vec{0}$ et $\vec{F}_{exc} = \vec{0}$ et l'équation du mouvement (11) se réécrit alors : $m\ddot{x} = -k(l(t) - l_0)$ soit avec $l(t) = l_0 + x(t)$:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$
 (12)

Q.3 En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du système ($[\omega_0] = T^{-1}$), on réécrit l'EDL₂ précédente : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ caractéristique de l'oscillateur harmonique.

Soit $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t)$ puis on applique les conditions initiales :

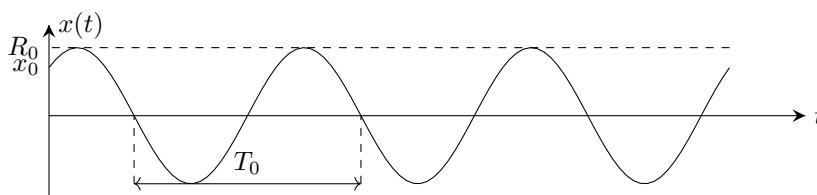
$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \text{ avec } \dot{x}(t) = -A_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases} \iff \begin{cases} A \times 1 + B \times 0 = x_0 \\ -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 = \dot{x}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = x_0 \\ B = \dot{x}_0/\omega_0 \end{cases}$$

Finalement : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ est la solution de l'EDL₂.

Q.4 On donne $x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0) = R_0 \cos(\phi_0) \cos(\omega_0 t) + R_0 \sin(\phi_0) \sin(\omega_0 t)$.

Par identification avec $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t)$, on obtient :

$$\begin{cases} R_0 \cos(\phi_0) = A_0 \\ R_0 \sin(\phi_0) = B_0 \end{cases} \implies \begin{cases} R_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \\ \tan(\phi_0) = \frac{B_0}{A_0} \end{cases} \implies \begin{cases} R_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \tan(\phi_0) = \frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0} \end{cases}$$



Q.5 Allure de $x(t)$:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

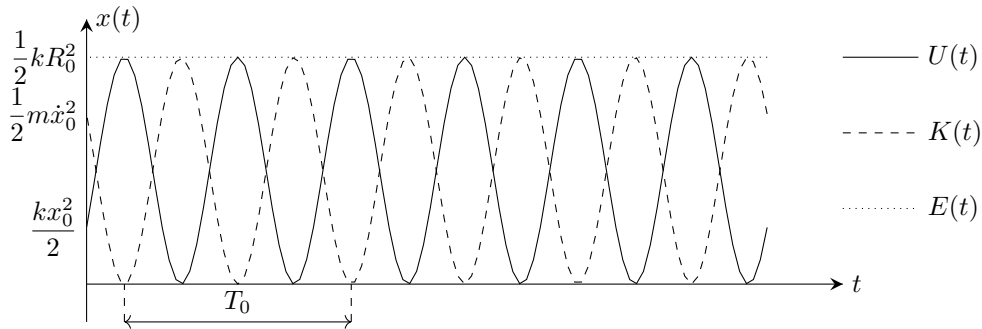
avec la période propre

Q.6 Par définition : $K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}m(-R_0\omega_0 \sin(\omega_0 t - \phi_0))^2$ soit $K(t) = \frac{1}{2}mR_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t - \phi_0)$
 $U(t) = \mathcal{E}_{p,el}(M)_{/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p,p}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}kx^2(t)$ soit $U(t) = \frac{1}{2}kR_0^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi_0)$

D'où l'énergie mécanique du système : $E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}kR_0^2 \underbrace{(\sin^2(\omega_0 t - \phi_0) + \cos^2(\omega_0 t - \phi_0))}_{=1}$

soit $E(t) = \frac{R_0^2}{2}k = C^{te}$ en accord avec le modèle sans frottements de l'oscillateur harmonique.

Q.7 Soit :



Q.8 Avec ici $\vec{F}_{exc} = \vec{0}$, l'équation du mouvement (11) se réécrit alors :

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \iff \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ on pose alors : } \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ 2\zeta\omega_0 = \frac{\gamma}{m} \end{cases} \quad (13)$$

Pour réécrire : $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$ caractéristique de l'oscillateur mécanique amorti.

on a alors : $\zeta = \frac{\gamma}{2m\omega_0} = \frac{\gamma}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}$ soit $\zeta = \frac{\gamma}{2\sqrt{mk}}$ coefficient d'amortissement (proportionnel à γ).

Q.9 Dans le cas où $\zeta < 1$, on pose l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \text{ de discriminant } \Delta = 4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\zeta^2 - 1)$$

Avec $\zeta < 1$ on a nécessairement $\Delta < 0 \implies$ régime transitoire pseudo-périodique.

Les solutions de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées telles que :

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_d \quad \text{où } \begin{cases} \tau = \frac{1}{\zeta\omega_0} \text{ temps caractéristique du régime transitoire} \\ \omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} \text{ pseudo pulsation} \end{cases}$$

On admet la solution de l'équation différentielle homogène : $x_H(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A_d \cos(\omega_d t) + B_d \sin(\omega_d t))$

Par linéarité de l'EDL₂, $x(t) = x_p + x_H(t)$ avec ici $x_p = 0$ d'où la solution générale :

$$\text{soit } x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A_d \cos(\omega_d t) + B_d \sin(\omega_d t))$$

$$\text{et } \dot{x}(t) = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t} (A_d \cos(\omega_d t) + B_d \sin(\omega_d t)) + e^{-\zeta\omega_0 t} (-A_d\omega_d \sin(\omega_d t) + B_d\omega_d \cos(\omega_d t))$$

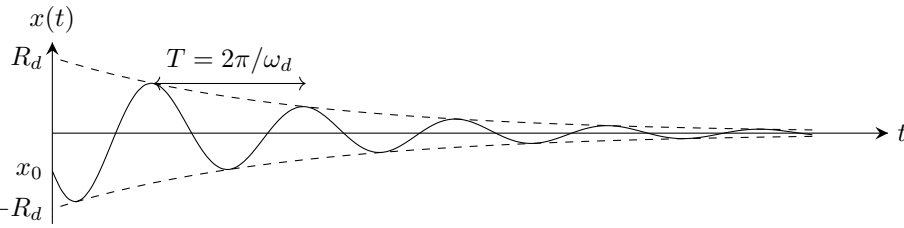
on applique les conditions initiales du problème :

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_d \times 1 + B_d \times 0 = x_0 \\ -\zeta\omega_0(A_d + 0) + 1 \times (0 + B_d\omega_d) = \dot{x}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_d = x_0 \\ B_d = \frac{1}{\omega_d} (\dot{x}_0 + x_0\zeta\omega_0) \end{cases}$$

Q.10 On donne : $x(t) = R_d e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_d) = R_d e^{-\zeta\omega_0 t} (\cos(\phi_d) \cos(\omega_d t) + \sin(\phi_d) \sin(\omega_d t))$

Par identification avec $x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A_d \cos(\omega_d t) + B_d \sin(\omega_d t))$ on obtient :

$$\begin{cases} R_d \cos(\phi_d) = A_d \\ R_d \sin(\phi_d) = B_d \end{cases} \implies \begin{cases} R_d = \sqrt{A_d^2 + B_d^2} \\ \tan(\phi_d) = \frac{B_d}{A_d} \end{cases} \implies \begin{cases} R_d = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\zeta\omega_0}{\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)^2} \\ \tan(\phi_d) = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0} + \zeta\right) \end{cases}$$



Q.11 Allure de $x(t)$:

Q.12 Par définition : $K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m (-\zeta R_d \omega_0 \cos(\omega_d t - \phi_d) e^{-\zeta \omega_0 t} - R_d \omega_d e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_0 t - \phi_0))^2$

$$K(t) = \frac{1}{2} m R_d^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} (\zeta \omega_0 \cos(\omega_d t - \phi_d) + \omega_d \sin(\omega_d t - \phi_d))^2$$

$$K(t) = \frac{1}{2} m R_d^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} (\zeta^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_d t - \phi_d) + \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t - \phi_d) + 2\zeta \omega_0 \omega_d \cos(\omega_d t - \phi_d) \sin(\omega_d t - \phi_d))$$

$$K(t) = \frac{1}{2} m R_d^2 \omega_0^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} (\zeta^2 \cos^2(\omega_d t - \phi_d) + (1 - \zeta^2) \sin^2(\omega_d t - \phi_d) + 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_d t - \phi_d) \sin(\omega_d t - \phi_d))$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} \cos^2(\omega_d t - \phi_d)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} m R_D^2 \omega_0^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} \cos^2(\omega_d t - \phi_d)$$

D'où l'énergie mécanique du système : $E(t) = K(t) + U(t)$

$$E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} (\zeta^2 \cos^2(\omega_d t - \phi_d) + (1 - \zeta^2) \sin^2(\omega_d t - \phi_d) + 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_d t - \phi_d) \sin(\omega_d t - \phi_d) + \cos^2(\omega_0 t - \phi_0))$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} (1 + \zeta^2 (\cos^2(\omega_d t - \phi_d) - \sin^2(\omega_d t - \phi_d)) + 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_d t - \phi_d) \sin(\omega_d t - \phi_d))$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} (1 + \zeta^2 (\cos^2(\omega_d t - \phi_d) - \sin^2(\omega_d t - \phi_d)) + \zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \sin(2\omega_d t - 2\phi_d))$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\zeta \omega_0 t} (1 + \zeta^2 \cos(2\omega_d t - 2\phi_d) + \zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \sin(2\omega_d t - 2\phi_d))$$

On retrouve le modèle de l'oscillateur harmonique pour $\zeta = 0$: $E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 = C^{te}$

Pour $\zeta = 1$ on se trouve en régime transitoire critique (retour à l'équilibre mécanique le plus rapide) dans ce cas $\omega_d = 0$ et $E(t) \simeq C^{te} \times e^{-2\omega_0 t}$ décroissance exponentielle de l'énergie.

Q.13 Par application du théorème de la puissance mécanique dans \mathcal{R} galiléen :

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \vec{v} \cdot \vec{v} = -\gamma \dot{x}^2 < 0$$

L'énergie totale est bien une fonction décroissante du temps (influence des frottements).

Q.14 Les instants t_1 et t_2 étant séparés d'une pseudo période T , on a alors :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{R_d e^{-\zeta \omega_0 t_1}}{R_d e^{-\zeta \omega_0 t_2}}\right) = \zeta \omega_0 (t_2 - t_1) = \zeta \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Dans le cas limite où $\zeta \ll 1$: $\sqrt{1 - \zeta^2} \simeq 1$, on a alors : $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \simeq 2\pi \zeta$

Q.15 Relevés graphiques : $x_1 \simeq 1,4602$ cm et $x_2 \simeq 1,0661$ cm on a alors AN : $\zeta = 5 \times 10^{-2}$

Dans ce cas on a également $\omega_d \simeq \omega_0$ soit $\omega_0 \simeq \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$, d'où : $\left| \begin{array}{l} k = 2,7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \\ \gamma \simeq 1,7 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \end{array} \right.$ Lorsque η augmente, la décroissance est plus rapide et on observe moins d'oscillations.

Q.16 On réécrit l'équation du mouvement (11) : $m\ddot{x} = -kx(t) - \gamma\dot{x}(t) + F_0 \cos(\omega t)$

On pose de même $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\zeta \omega_0 = \frac{\gamma}{m}$ pour réécrire :

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Q.17 Au signal réel $x(t) = X \cos(\omega t - \phi)$ est associé le signal complexe : $\underline{x}(t) = X e^{j(\omega t - \phi)}$
 on réécrit l'EDL₂ en notations complexes :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \iff X e^{-j\phi} e^{j\omega t} (-\omega^2 + 2\zeta\omega_0j\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

d'où $X = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\omega_0^2}}$ et $\tan(\phi) = \frac{2\zeta\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Q.18 On exprime $M = \frac{X}{F_0/m} = \frac{k/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\omega_0^2}}$ avec $r = \omega/\omega_0$ pulsation réduite :

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2\omega_0^2}{\omega_0^4}}} \iff M = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2r^2}$$

sans dimension et est analogue à une fonction de transfert H .

Q.19 À la résonance, l'amplitude réelle de la réponse passe par un maximum, soit si $g(r) = (1 - r^2)^2 + 4\zeta^2r^2$ passe par un minimum. On résout alors $g'(r_{\text{res}}) = 0$:

$$2 \times (-2r_{\text{res}}) \times (1 - r_{\text{res}}^2) + 4\zeta^2 \times 2r_{\text{res}} = 0 \iff 2r_{\text{res}}(4\zeta^2 - 2(1 - r_{\text{res}}^2)) = 0 \iff 4\zeta^2 - 2 + 2r_{\text{res}}^2 = 0$$

Comme $r_{\text{res}} \neq 0$: $r_{\text{res}}^2 = 1 - 2\zeta^2 > 0$ si $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$.

Q.20 Exploitation de la figure : dans le cas où $\zeta \ll 1$, on relève $T_0 \simeq 4$ s.

Sachant que $\omega_r \simeq \omega_0$, avec une période d'excitation de 8 s, on est suffisamment loin de la résonance et permet d'éviter des amplitudes de mouvement et de déformation trop importantes.

Solution de l'exercice 4 : Spectromètre de masse

Q.1 On a la relation $\vec{E} = -\text{grad}(V)$ comme les ions sont chargés positivement, le champ électrique doit être de de F_1 vers F_2 donc le potentiel le plus élevé est sur la plaque P_1 . On a la relation :

$$\|\vec{E}_0\| = \frac{U}{d} \quad \text{AN : } \|\vec{E}_0\| = 1,00 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Q.2 Système : Ion de masse m et de charge q assimilé à un points M

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : $\vec{F}_{L0} = q\vec{E}_0$ d'énergie potentielle $E_p = qV$ et \vec{P} est négligé. **TEM :** $E_m(F_1) = E_m(F_2)$

$$\iff \Delta E_c = -\Delta E_p \iff \frac{1}{2}mv_0^2 = -q(-U) \implies v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Q.3 Soit $m_1 = 200u$ avec $q = 2e$ et $m_2 = 202u$ avec $q = 2e$:

$$v_{01} = 1,383 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{02} = 1,377 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q.4 Pour que la trajectoire soit rectiligne le système doit être pseudo-isolé.

Q.5 On doit donc avoir $\vec{F}_{L1} = q\vec{E}_1 + q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_1 = \vec{0}$ en projetant sur l'axe de \vec{E}_1 on obtient :

$$q\|\vec{E}_1\| - qv_0\|\vec{B}_1\| = 0 \implies v_0 = \frac{\|\vec{E}_1\|}{\|\vec{B}_1\|}$$

Tous les ions dont la vitesse est différence de v_0 seront dévié de la trajectoire rectiligne.

Q.6 AN : $v_0 = 1,384 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec ces réglages, c'est l'isotope $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ qui partvient en F_3 .

Q.7 Bilan des forces : $\vec{F}_{L2} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_2$ avec $\mathcal{P}(\vec{F}_{L2}) = q\vec{v} \wedge \vec{B}_2 \cdot \vec{v} = 0$

TPC : $\frac{dE_c}{dt} = 0 \iff E_c = C^{te} \implies v^2 = C^{te}$ donc le mouvement est uniforme.

Q.8 Coordonnées : On se place dans le repère de Frenet $\vec{v} = v\vec{u}_T$ et $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$

PFD : $m\vec{a} = \vec{F}_{L2} \iff m\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_N = qv_0\|\vec{B}_2\|\vec{u}_N$

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{q\|\vec{B}_2\|}} \quad \text{AN : } \underline{R_1 = 0,722 \text{ m}} \text{ et } \underline{R_2 = 0,726 \text{ m}}$$

Q.9 C_1 reçoit l'isotope dont le rayon de la trajectoire sera le plus petit donc R_1 soit l'isotope $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et C_2 l'isotope $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.

Q.10 Soit $\delta = 2R_2 - 2R_1 = 8 \text{ mm}$ est la distance nécessaire pour installer les détecteurs.

Q.11 Soit $Q_1 = N_1 \times 2e$ et $Q_2 = N_2 \times 2e$ on en déduit :

$$x(^{200}\text{Hg}^{2+}) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = 0,774 \quad \text{et} \quad x(^{202}\text{Hg}^{2+}) = \frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = 0,226$$

On obtient alors : $M(\text{Hg}) = x(^{200}\text{Hg}^{2+})\frac{m_1}{\mathcal{N}_A} + x(^{202}\text{Hg}^{2+})\frac{m_2}{\mathcal{N}_A} = 200,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Solution de l'exercice 5 : Étude de la comète 67P Churyomov - Gerasimenko

Q.1 Système : {Comète M (m)}

Référentiel : \mathcal{R} héliocentrique supposé galiléen.

Bilan : $\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{M_\odot m}{R^2}\vec{u}_r$ avec \vec{u}_r le vecteur unitaire des coordonnées polaires dans le plan de l'orbite circulaire.

PFD : $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F}$ or pour une trajectoire circulaire en coordonnées polaires $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$/\vec{u}_r : mR\dot{\theta}^2 = \mathcal{G}\frac{M_\odot m}{R^2} \quad \text{or} \quad \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \implies \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot}}$$

Généralisation à une ellipse :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot}} \implies \frac{T_c^2}{a_c^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot} \implies T_c = \sqrt{\frac{(2\pi a_c)^3}{2\pi\mathcal{G}M_\odot}} \quad \text{AN : } \underline{T_c \simeq 6,2 \text{ an}}$$

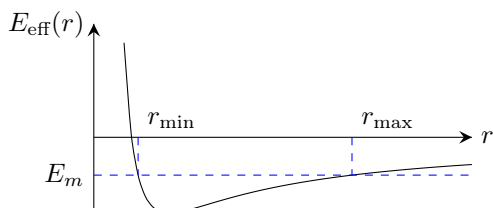
Q.2 D'après la définition : $\vec{\sigma}_S = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$. On applique le TMC au point S :

$$\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = \mathcal{M}_S(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{\sigma}_S = \vec{C}^{te} \implies \vec{r} \perp \vec{\sigma}_S \text{ et } \frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{\sigma}_S \implies \text{mouvement plan orthogonal à } \vec{\sigma}_S$$

Coordonnées cylindriques : $\vec{r} = r\vec{u}_r$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ soit $\vec{\sigma}_S = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ donc $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$.

Q.3 Soit $E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$ or $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \implies E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2}$

Énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p(r) = -\frac{\mathcal{G}M_\odot m}{r}$ l'énergie potentielle gravitationnelle.



$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad \boxed{E_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_\odot m}{r}}$$

Soit lorsque $r = r_{\min}$ ou $r = r_{\max}$:

$$\dot{r} = 0 \implies E_m = E_{\text{eff}}(r_{\min}) = E_{\text{eff}}(r_{\max})$$

Q.4 Si $E_m = E_{\text{effmin}} = E_0$ alors $r_{\min} = r_{\max} = r_0$:

$$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}(r = r_0) = 0 \iff -\frac{mC^2}{r_0^3} + \frac{\mathcal{G}M_\odot m}{r_0^2} = 0 \implies \boxed{r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_\odot}} \implies \boxed{E_0 = E_{\text{eff}}(r = r_0) = -\frac{\mathcal{G}^2 M_\odot^2 m}{2C^2}}$$

On obtient alors en $r = r_0$: $E_m = E_c(r_0) + E_p(r_0)$ soit $\boxed{E_c(r_0) + E_p(r_0) = \frac{\mathcal{G}^2 M_\odot^2 m}{2C^2}}$

Q.5 Soit $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_\odot m}{r} \iff r^2 + \frac{\mathcal{G}M_\odot m}{E_m}r - \frac{mC^2}{2E_m} = 0$

r_{\max} et r_{\min} sont deux solutions positives si $E_m < 0$ et $\Delta = \left(\frac{\mathcal{G}M_\odot m}{E_m}\right)^2 + \frac{4mC^2}{2E_m} > 0 \iff E_m > E_0$

Alors $r^2 + \frac{\mathcal{G}M_\odot m}{E_m}r - \frac{mC^2}{2E_m} = (r - r_{\min})(r - r_{\max}) = 0$

Soit $r_{\min} + r_{\max} = 2a = -\frac{\mathcal{G}M_\odot m}{E_m} \implies E_m = -\frac{\mathcal{G}M_\odot m}{2a}$

En remarquant que sur le schéma $r_{\max} = a + ae = a(1 + e)$ et $r_{\min} = a - ae = a(1 - e)$ on obtient :

$$r_{\min}r_{\max} = a^2(1 - e^2) = -\frac{mC^2}{2E_m}$$

Q.6 Soit $\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2} = C^{te}$ la loi de Kepler.

$$\frac{S}{T} = \frac{C}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} \implies T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{C} \implies T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{C^2} \implies \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot}$$

On retrouve la loi de Kepler des orbites pour des trajectoires elliptiques.

Q.7 Question hors programme.

I- Analyse d'un circuit électrique

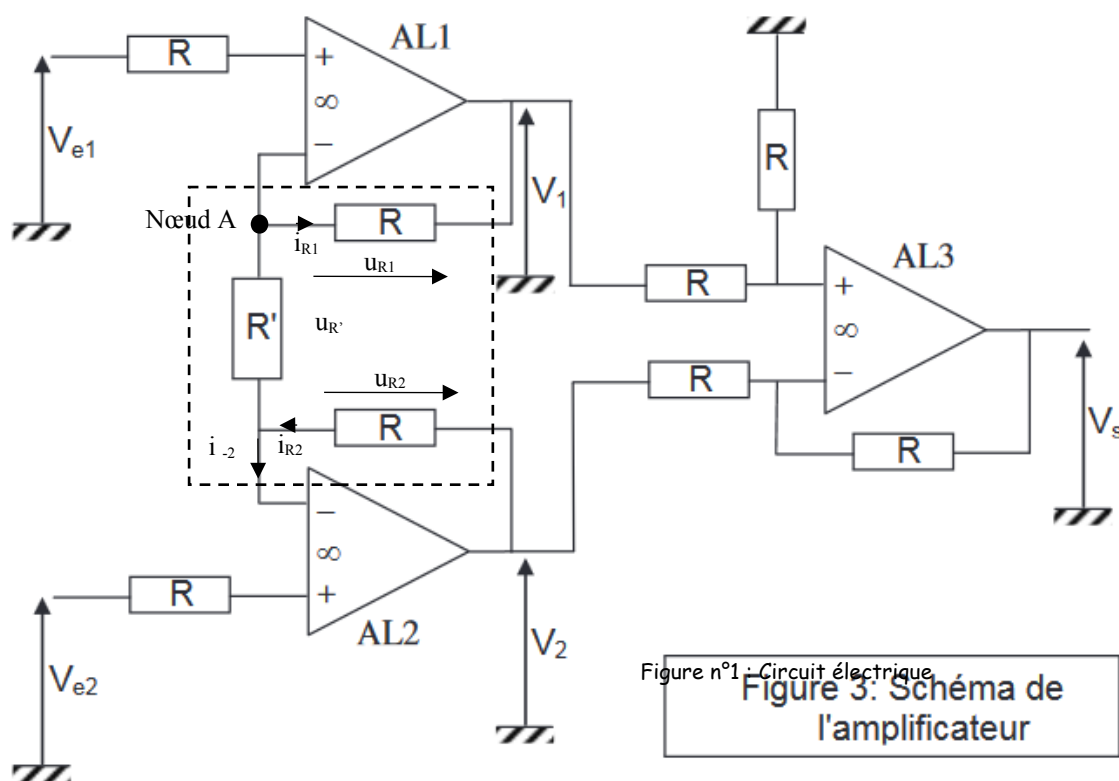


Figure n°1 : Circuit électrique
Figure 3: Schéma de l'amplificateur

1°/ Loi des nœuds : $i_{R'} = i_{-1} + i_{R1}$

2°/ voir ci-dessus

3°/ On est en convention générateur, donc : $u_{R1} = -R \cdot i_{R1}$.

4°/ En utilisant une loi de maille : $V_1 - u_{R1} + u_{R'} + u_{R2} - V_2 = 0$

5°/ Loi au nœud : $i_{R'} + i_{-2} = i_{R2}$

Comme $i_{-1} = i_{-2} = 0$ alors $i_{R'} = i_{R1}$ et $i_{R'} = i_{R2}$ la maille précédente constitue donc un circuit série ou un diviseur de tension : $V_1 +$

$$R i_{R'} + R' i_{R'} + R i_{R'} - V_2 = 0$$

$$i_{R'} = \frac{V_2 - V_1}{R + R' + R}$$

$$u_{R'} = R' \cdot i_{R'} = \frac{R' \cdot (V_2 - V_1)}{R + R' + R}$$

II- Simulation de la temporisation d'un éclairage de voiture.

1°/ $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

2°/ En régime continu : $U_{PN} = u_C$.

3°/ Pour $t \geq 0$, C et R sont en série : $u_R(t) = u_C(t)$ On a pour la tension $u_R(t) = -R \cdot i(t) = -R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

Alors : $R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$

4°/ Il s'agit d'une équation différentielle du 1^{er} ordre sans second membre. Le temps caractéristique $\tau = R \cdot C$

$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ On détermine A par la condition initiale fournie par la continuité de la tension aux bornes du condensateur :

$u_C(t=0) = U_{PN}$

$$u_C(t) = U_{PN} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5°/ $u_R(t) = u_C(t) = U_{PN} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

6°/ Le temps pendant lequel $u_R \geq 0$ à 1% près correspond à environ 5τ .

7°/ Si l'on choisit pour $R = 10 \text{ k}\Omega$ et pour $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$, $\tau = 1 \text{ s}$. La durée de l'éclairement est alors de l'ordre de 5s On veut 5 à 6 fois plus, il faut donc multiplier le produit $R.C$ par 5, ce qui est plus facile avec R ($R = 50 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ par exemple).

III- Etude d'un régime transitoire du second ordre : tension aux bornes d'une bobine.

$v_c(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E . A $t = 0$, $v_c(t)$ passe brusquement de 0 à E , le condensateur n'étant pas chargé et aucune énergie n'étant accumulée dans la bobine.

On donne : $E = 10 \text{ V}$; $R = 4 \text{ k}\Omega$; $L = 0,16 \text{ H}$; $C = 10 \text{ nF}$

$$\text{On pose : } \lambda = \frac{1}{2RC} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

1°/ A $t = 0^+$, $v_c(t)$ vient juste de passer brusquement à E . La tension aux bornes du condensateur est une grandeur continue, il est déchargé ($v_c(0^-)$) donc $v_c(0^+) = 0$

Le courant dans la bobine est une fonction continue, l'énergie $\frac{1}{2}Li_L^2(t)$ est nulle

($i_L(0^-) = 0$ donc $i_L(0^+) = 0$). La loi de la maille s'écrit $v_c(t) = v_c(t) + v_s(t)$ donc $v_s(0^+) = E$.

$$\text{Pour la résistance } v_s(t) = R \cdot i_R(t) \quad \text{donc } i_R(0^+) = \frac{E}{R}$$

$$2^\circ/ v_s(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{ainsi à } t = 0^+, \frac{di_L(t=0^+)}{dt} = \frac{E}{L} \text{ puisque } v_s(0^+) = E.$$

3°/ Le régime permanent correspond à un régime continu. En régime continu, la bobine se comporte comme un fil parfait : $v_s(t \rightarrow \infty) = 0$

4°/ La loi au nœud : $i(t) = i_R(t) + i_L(t)$ Loi de la maille : $E = v_c(t) + v_s(t)$

$$\text{Lois de fonctionnement : } v_s(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}; v_s(t) = R \cdot i_R(t); i(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot v_s(t) = \frac{1}{R} \cdot L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad v_c(t) = E - v_s(t) \quad i(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} = -LC \cdot \frac{d^2i_L(t)}{dt^2}$$

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) \Rightarrow -LC \cdot \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} = \frac{L}{R} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \quad LC \cdot \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

$$\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = 0 \quad \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0 \quad \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

5°/ Ils'agit d'une équation différentielle du second ordre. On détermine le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 \quad \lambda = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 4 \cdot 10^3 \times 10 \cdot 10^{-9}} = 12500; \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{0,16 \times 10 \cdot 10^{-9}} = 6,25 \cdot 10^8 \quad \Delta$$

< 0 donc

$$i_L(t) = e^{-\lambda t} (A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t)) \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$i_L(t=0) = 0 = A$$

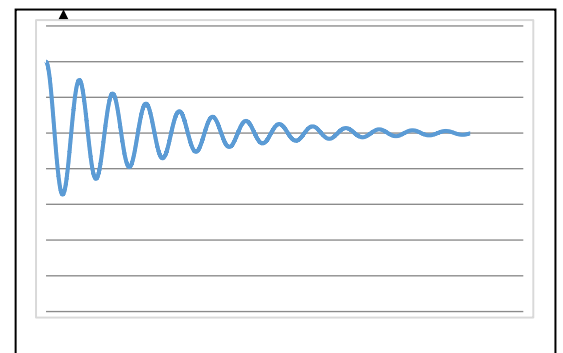
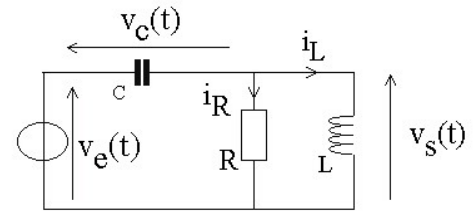
$$\frac{di_L(t=0^+)}{dt} = \frac{E}{L} \quad B \cdot \Omega = \frac{E}{L} \quad i_L(t) = \frac{E}{L \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} e^{-\lambda t} \cdot (\sin(\Omega t))$$

$$6^\circ/ v_s(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{E}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda \cdot \sin(\Omega t) + (\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}) \cdot \cos(\Omega t))$$

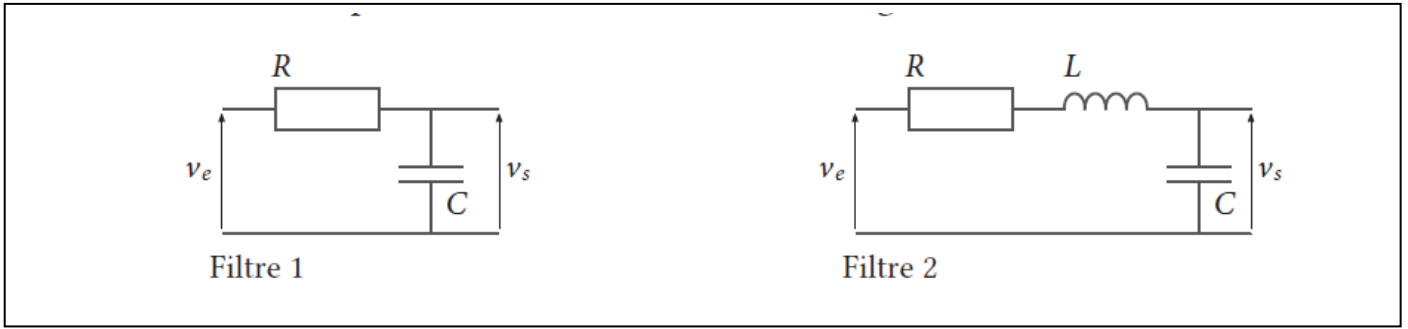
)

$$7^\circ/ \text{Exprimer la pseudo période } T = \frac{2}{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = 290 \text{ }\mu\text{s}$$

8°/ Tracer l'allure de $v_s(t)$.



IV- filtrage linéaire



1- On a un diviseur de tension : $V_s = \frac{Z_C \cdot V_e}{Z_C + Z_R}$ $H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ G

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

2- $\omega \rightarrow 0$ $G \rightarrow 1$ $G_{dB} \rightarrow 0$
 $\omega \rightarrow \infty$ $G \rightarrow 0$ $G_{dB} \rightarrow -20 \cdot \log(RC\omega) = -20 \cdot \log(RC) - 20 \log(\omega)$ pente à -20 dB/décade

3- Tracer l'allure du diagramme de Bode.

4- $G_{max} = 1$

Soit ω_c la pulsation de coupure, elle est définie par $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}}$ $RC\omega_c = 1$ $\omega_c = \frac{1}{RC}$

4°/ Lorsque la fréquence est nulle (régime permanent continu) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Ainsi le courant $i(t)$ est nul, ce qui entraîne une tension nulle aux bornes de la résistance tandis que la tension aux bornes de la bobine nulle. Ainsi $v_s(t) = e(t)$ à basse fréquence.

À grande fréquence le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé et la bobine comme un interrupteur ouvert. Donc la tension aux bornes du condensateur est nulle : $v_s(t) = 0$.

Le filtre 2 se comporte comme un filtre passe-bas.

5°/ On utilise la notation complexe pour traiter le R.P.S. (cf. figure ci-dessous). Le circuit série du filtre 2 permet d'utiliser le diviseur de tension :

$$V_s = \frac{Z_C \cdot E}{Z_C + Z_L + Z_R} \quad H = \frac{V_s}{E} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

6°/ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, la pulsation propre par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $H = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$ 1 point

8°/ $v_e(t) = V_e \cdot \cos(\omega_0 t)$ avec $V_e = 0,5$ V. $Q = 10$

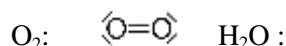
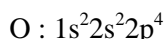
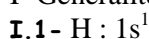
$$H(\omega_0) = \frac{1}{1 - 1 + j \cdot \frac{1}{Q}} = -jQ \quad H = ||H|| = Q = 10 \quad \varphi = \arg(H) = -\frac{\pi}{2}$$

$$v_s(t) = Q \cdot V_e \cdot \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = 5 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

On observe un phénomène de surtension (l'amplitude de la tension de sortie est supérieure à celle de l'entrée). Compte-tenu de la question 1, il y a vraisemblablement aussi un phénomène de résonance.

I- Les piles à combustibles à oxyde solide

I- Généralités



I.2- A l'électrode 1 le dihydrogène est **oxydé** en H₂O : Il s'agit donc de l'**anode**

A l'électrode 2 le dioxygène est **réduit** en H₂O : $O_2 + 4.H^+ + 4.e^- = 2 H_2O$ Il s'agit donc de la **cathode**.

Les électrons vont de l'électrode 1 vers l'électrode 2 par la résistance.

I.3- A l'électrode 1 : $H_{2(g)} = 2 H^+ + 2.e^-$

A l'électrode 2 : $O_2 + 4.H^+ + 4.e^- = 2 H_2O$

I.4- le combustible est le dihydrogène que l'on doit apporter tandis que l'oxygène est fourni par l'air.

I.5- $O_{2(g)} + 2 H_{2(g)} = 2 H_2O_{(l)}$

Dans un véhicule motorisé fonctionnant grâce à une pile à combustible, on estime à 1,5 kg la masse de dihydrogène nécessaire pour parcourir 250 km.

I.6- $n_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{M(H_2)} = \frac{1,5}{10^{-3}} = 1,5.10^3 \text{ mol}$

$V_{H_2} = n_{H_2} \cdot V_{mol} = 1,5.10^3 \times 24 = 36.10^3 \text{ L} = 36 \text{ m}^3$

I.7- L'avantage pour l'environnement de l'utilisation d'une pile à combustible au dihydrogène est que le produit est de l'eau qui n'est pas polluante et n'a pas d'effet sur le climat (ce n'est pas exactement le cas, la vapeur d'eau est aussi un gaz à effet de serre mais la quantité d'eau présente dans l'atmosphère n'est passivement influencée par celle résultant de l'utilisation de la pile à combustible, pour l'instant du moins). Par contre stocker et s'approvisionner en dihydrogène gazeux est beaucoup plus difficile.

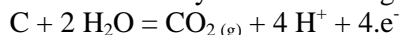
II- Electrolyse de l'alumine

Pour l'électrolyse de l'alumine, les électrodes sont constituées d'aluminium liquide et de graphite solide. On observe un dégagement gazeux de dioxyde de carbone. Dans ce milieu et à cette température, on obtient des solides ioniques totalement dissociés en leurs ions constitutifs en rajoutant un solvant.

Seuls les ions de ces solides sont alors à prendre en compte pour cette question.

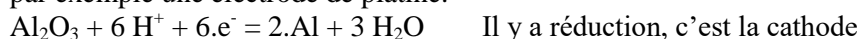
II.1- L'alumine Al₂O₃ est constituée des ions Al³⁺ et O²⁻. En perdant 3 électrons l'aluminium acquiert une configuration plus stable, celle du gaz noble qui le précède : le néon. L'oxygène en gagnant 2 électrons acquiert la structure électronique plus stable du gaz noble qui le suit : l'argon

II.2- L'électrode sur laquelle a lieu la formation de dioxyde de carbone gazeux est celle en carbone.



Il y a oxydation c'est l'anode.

II.3- Il faut pour l'électrode sur laquelle a lieu la formation d'aluminium liquide une électrode qui ne réagisse pas, par exemple une électrode de platine.



III- Magnésium en solution aqueuse

III.1- Sur la frontière Mg²⁺/Mg le potentiel E = -2,42 V.

La demi équation électronique du couple : $Mg^{2+} + 2.e^- = Mg$

D'après la formule de Nernst : $E = E^{\circ}_{Mg^{2+}/Mg} + \frac{0,06}{2} \cdot \log([Mg^{2+}])$

$E^{\circ}_{Mg^{2+}/Mg} = E - \frac{0,06}{2} \cdot \log([Mg^{2+}]) = -2,42 - \frac{0,06}{2} \times (-2) = -2,36 \text{ V}$

III.2- Sur la frontière verticale : le précipité Mg(OH)₂ débute sa formation

$Mg^{2+} + 2 HO^- = Mg(OH)_2$ mais la concentration en Mg²⁺ n'est pratiquement pas diminuée

$K_s = [Mg^{2+}]_{app} \cdot [HO^-]_{app}^2$ avec $[Mg^{2+}]_{app} \approx c_{tr}$ on a $[H_3O^+]_{app} \cdot [HO^-]_{app} = K_e$ et $[H_3O^+]_{app} = 10^{-9,5}$

$K_s = c_{tr} \cdot \frac{K_e^2}{[H_3O^+]_{app}^2} = \frac{10^{-2} \times 10^{-28}}{10^{-19}} = 10^{-11}$

Une canalisation en fonte (alliage à base de fer) est enterrée dans le sol. Pour la protéger de la corrosion on la relie à une électrode de magnésium, elle aussi enterrée.

III.3- On voit que $E^{\circ}_{Fe^{2+}/Fe} > E^{\circ}_{Mg^{2+}/Mg}$ l'ion Fe²⁺ est plus oxydant que Mg²⁺, il se réduit en Fe en réagissant avec l'électrode de magnésium qui s'oxyde en Mg²⁺, elle constitue donc l'anode : $Mg_{(s)} = Mg^{2+} + 2.e^-$

La canalisation est la cathode : $Fe^{2+} + 2.e^- = Fe_{(s)}$

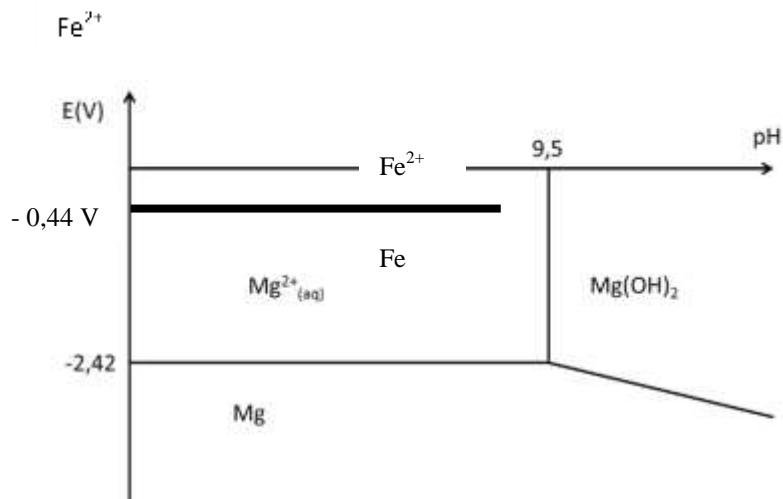
III.4- $n_{Mg} = \frac{m}{M(Mg)}$

$n_e = \frac{I \cdot \Delta t}{F}$

D'après la demi équation électronique $n_e = 2 n_{Mg}$

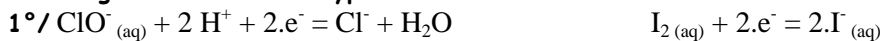
$2 \cdot \frac{m}{M(Mg)} = \frac{I \cdot \Delta t}{F}$

$\Delta t = 2 \cdot F \cdot \frac{m}{I \cdot M(Mg)}$



IV- Suivi cinétique de la décoloration de l'erythrosine B

1. Dosage de la solution d'hypochlorite de sodium commerciale



2 électrons échangés : $\text{ClO}^-_{(\text{aq})} + 2 \text{H}^+ + 2.\text{I}^-_{(\text{aq})} = \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O} + \text{I}_2_{(\text{aq})}$

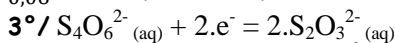
2°/ $E^\circ(\text{ClO}^-_{(\text{aq})}/\text{Cl}^-_{(\text{aq})}) > E^\circ(\text{I}_2_{(\text{aq})}/\text{I}^-_{(\text{aq})})$: ClO^- est l'oxydant le plus fort et I^- le réducteur le plus fort. L'écart est supérieur à 0,25 V la réaction est totale (favorisée).

On peut aussi déterminer directement $K_R = 10^{\frac{2.(E^\circ_{\text{Cl}^-/\text{ClO}^-} - E^\circ_{\text{I}^-/\text{I}_2})}{0,06}} = 10^{\frac{2 \times 0,35}{0,06}} \approx 10^{12}$: la réaction est favorisée.

En effet à l'équilibre les potentiels des deux couples sont égaux :

$$E^\circ_{\text{ClO}^-/\text{Cl}^-} + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{[\text{ClO}^-].[H_3O^+]^2}{[\text{Cl}^-]}\right) = E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-} + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2}\right) \quad E^\circ_{\text{ClO}^-/\text{Cl}^-} - E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-} = \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{[\text{I}_2].[Cl^-]}{[\text{ClO}^-].[H_3O^+]^2.[I^-]^2}\right)$$

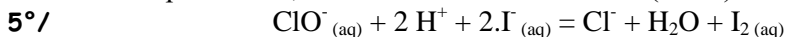
$$\frac{2}{0,06} (E^\circ_{\text{ClO}^-/\text{Cl}^-} - E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-}) = \log(K_R)$$



2 électrons échangés : $2.\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})} + \text{I}_2_{(\text{aq})} = \text{S}_4\text{O}_6^{2-}_{(\text{aq})} + 2.\text{I}^-_{(\text{aq})}$

4°/ $E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}_{(\text{aq})}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})}) < E^\circ(\text{I}_2_{(\text{aq})}/\text{I}^-_{(\text{aq})})$: $\text{I}_2_{(\text{aq})}$ est l'oxydant le plus fort et $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ le réducteur le plus fort.

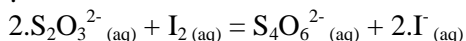
L'écart est supérieur à 0,25 V la réaction est favorisée (totale). $10^{\frac{2.(E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-} - E^\circ_{\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}})}{0,06}} = 10^{\frac{2 \times 0,46}{0,06}} \approx 10^{15}$



n_1	excès	excès	0	excès	0
$n_1 - x_f$	excès	excès	x_f	excès	x_f

$$x_f = n_1$$

Dosage :



$$\text{C.V}_{\text{eq}} \quad x_f = n_1 \quad 0 \quad \text{excès}$$

$$\text{C.V}_{\text{eq}} - 2.x'_f \quad x_f - x'_f \quad x'_f \quad \text{excès}$$

$$\frac{\text{C.V}_{\text{eq}}}{2} = x'_f = n_1 = \frac{2.10^{-2} \times 16.10^{-3}}{2} = 16.10^{-5} \text{ mol dans le volume prélevé de 10 mL. Donc la concentration est de } 16.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

La dilution initiale étant de 50, la concentration en ions hypochlorite dans la solution commerciale est de $8.10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

2. Suivi cinétique de la décoloration de l'érythrosine B

6°/ 10 mL d'érythrosine B (E127) de concentration $8,4.10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ correspond à $8,4.10^{-8} \text{ mol}$

3 mL d'hypochlorite de concentration $0,8 \text{ mol.L}^{-1}$ correspond à $2,4.10^{-3} \text{ mol}$

L'hypochlorite est en large excès, donc sa concentration ne va pas varier de manière significative.

$$v \approx k.[E127]^\alpha.[\text{ClO}^-]_0^\beta \approx k_{\text{app}}.[E127]^\alpha$$

avec $k_{\text{app}} = k.[\text{ClO}^-]_0^\beta$ la constante de vitesse apparente.

$$7^\circ / \text{ Dans l'hypothèse où } \alpha \text{ est égal à } 1 : \frac{d[E127]}{dt} = -k_{\text{app}}.[E127] \quad \text{Equation différentielle du } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

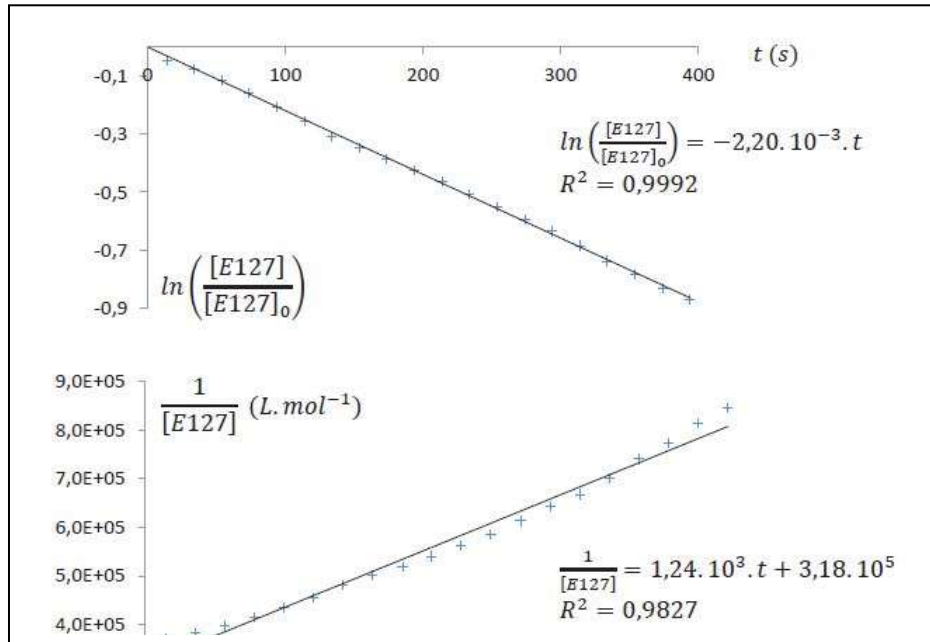
$$\frac{1}{k_{\text{app}}} \frac{d[E127]}{dt} + [E127] = 0 \quad \text{le temps caractéristique } \tau = \frac{1}{k_{\text{app}}} \quad \text{La solution } [E127](t) = A.e^{-k_{\text{app}}.t}$$

$$\text{La condition initiale : } [E127](t=0) = [E127]_0 \quad [E127](t) = [E127]_0.e^{-k_{\text{app}}.t} \quad \ln\left(\frac{[E127]}{[E127]_0}\right) = -k_{\text{app}}.t$$

8°/ Dans l'hypothèse où α est égal à 2 : $-\frac{d[E127]}{dt} = k_{app} \cdot [E127]^2$ Equation différentielle du 2^{ème} ordre

On sépare les variables : $\frac{d[E127]}{[E127]^2} = k_{app} \cdot dt$ On intègre : $\frac{1}{[E127](t)} - \frac{1}{[E127]_0} = k_{app} \cdot t$

9°/ Il est clair que la première courbe est une fonction affine au contraire de la deuxième courbe, ce qui valide l'ordre $\alpha = 1$. $k_{app}^{\text{O}} = 2,20 \cdot 10^{-3} \cdot s^{-1}$



On exploite de même les résultats des manipulations ①, ②, ③ et ④.

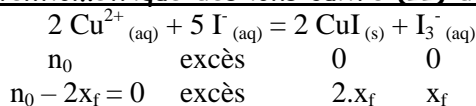
Solution n°	①	②	③	④
$[ClO^-]_0$ (mol.L ⁻¹)	0,080	0,160	0,240	0,320
k_{app} (unité S.I.)	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$4,40 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$	$8,80 \cdot 10^{-2}$

On observe que lorsque l'on double la concentration la constante de vitesse double, donc $\beta = 1$

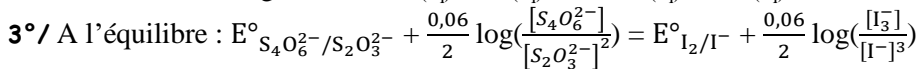
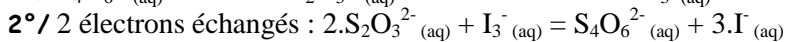
10°/ Pour une manipulation analogue correspondant à une concentration initiale en ions hypochlorite $[ClO^-]_0$ égale à $1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, la constante de vitesse apparente k_{app} serait égale à $2,75 \cdot 10^{-2}$ unités S.I.

Donc $k = 2,75 \cdot 10^{-2} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$

V- Dosage potentiométrique des ions cuivre (II) dans la bouillie bordelaise

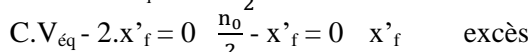
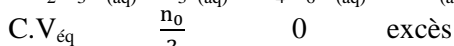
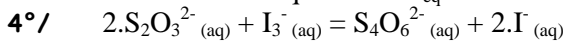


$$x_f = \frac{n_0}{2}$$



$$E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-} - E^\circ_{\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} = \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{[\text{S}_4\text{O}_6^{2-}] \cdot [\text{I}^-]^3}{[\text{S}_2\text{O}_3^{2-}]^2 \cdot [\text{I}_3^-]}\right) \quad 10^{\frac{2 \cdot (E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-} - E^\circ_{\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}})}{0,06}} = 10^{\frac{2 \times 0,46}{0,06}} \approx 10^{15}$$

On obtient un volume équivalent $V_{\text{éq}} = 10 \text{ mL}$.



$$\frac{C \cdot V_{\text{éq}}}{2} = x'_f = \frac{n_0}{2}$$

$$C \cdot V_{\text{éq}} = n_0 = 1 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = 10^{-3} \text{ mol de Cu}^{2+} \text{ dans } 20 \text{ mL}$$

Donc une concentration de $[\text{Cu}^{2+}] = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ soit un titre massique en Cu^{2+} $t_{\text{Cu}} = [\text{Cu}^{2+}] \cdot M(\text{Cu})$

$$t_{\text{Cu}} = 5 \cdot 10^{-2} \times 63,5 \text{ g.L}^{-1}$$

Au départ 15,9 g de bouillie ont été dissoute dans un litre : $w = 5 \cdot 10^{-2} \times \frac{63,5}{15,9} = 0,2$ soit 20 %.

