

Stage : vacances de printemps

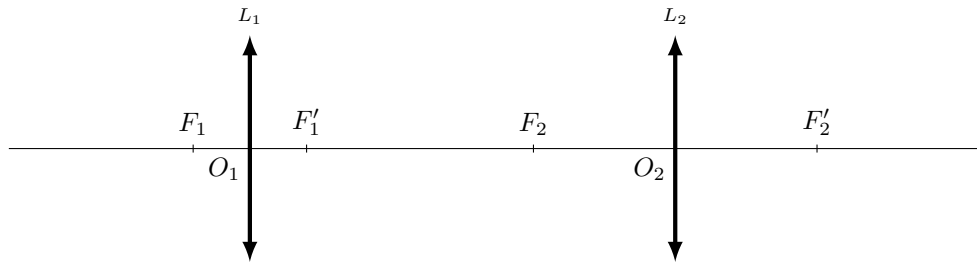
Principe : Vous trouverez une sélection d'exercices à chercher sur les différents thèmes évalués au cours de l'année. Le but est de chercher à travailler vos points faibles, pour cela je vous invite à :

- travailler à plusieurs (chercher l'aide du voisin et pas la réponse du voisin) ;
- Appeler à l'aide le professeur ;

Optique

Exercice 1 : Le microscope classique

Le microscope est modélisé par un système de deux lentilles minces convergentes, l'une constituant l'objectif (lentille L_1 de centre O_1 et de distance focale image $f'_1 = 5$ mm), et l'autre constituant l'oculaire (lentille L_2 de centre O_2 et de distance focale image $f'_2 = 15$ mm). Le microscope est représenté sur le schéma ci-dessous.



On fixe $\overline{O_1O_2} = D_0 = 120$ mm. On choisit le sens positif dans le sens de propagation de la lumière.

On rappelle la relation de conjugaison d'une lentille et l'expression du grandissement γ :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Q.1 Rappeler les conditions de Gauss.

Si F'_1 est le foyer image de L_1 et F_2 le foyer objet de L_2 , on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$.

Q.2 Exprimer Δ en fonction de f'_1 , f'_2 et D_0 . Calculer Δ .

Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance d devant L_1 . L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

Q.3 On souhaite qu'un œil au repos puisse voir l'image définitive $A'B'$ du microscope. Comment doit être l'image définitive en sortant du microscope ?

Q.4 Pour former l'image définitive, où doit être placé l'image intermédiaire A_1B_1 ?

Q.5 Exprimer la position de l'objet d en fonction de f'_1 et Δ . Calculer d .

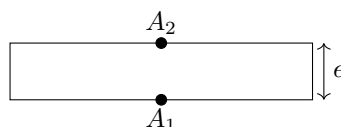
Q.6 Exprimer le grandissement γ_1 induit par l'objectif en fonction de f'_1 et Δ . Calculer sa valeur.

Q.7 Sur la feuille de papier millimétrée, faire un schéma ou ne figure que la lentille L_1 en utilisant l'échelle x 2 (1 mm correspond à 2 mm), faire une construction géométrique sur le document Annexe. Faire apparaître l'image intermédiaire A_1B_1 , l'objet AB et au moins trois rayons issus de B_1 et sortant de l'oculaire. Faire apparaître le diamètre apparent de l'image α' .

Le grossissement commercial du microscope est défini par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ où α est l'angle sous lequel AB serait observé sans le microscope dans les conditions optimales, c'est-à-dire vu au P.P. d'un œil normal situé à une distance $D_m = 250$ mm.

Q.8 Dans les conditions de Gauss, exprimer le grossissement G en fonction de Δ , D_m , f'_1 et f'_2 . Calculer sa valeur.

On souhaite utiliser le microscope pour mesurer l'épaisseur e d'une lame de verre d'indice n . On place deux pastilles objets A_1 et A_2 sur chaque faces de la lame de verre.



On considère qu'on a fait la mise au point du microscope sur A_2 . On souhaite maintenant translater la lame de verre d'une valeur ϵ pour voir A_1 net à travers le microscope.

Q.9 En tenant compte de la réfraction des rayons lumineux qui sortent de la lame de verre, et en se plaçant dans les conditions de Gauss, exprimer ϵ en fonction de e et n .

Exercice 2 : Optique de l'appareil photo

La date conventionnelle de l'invention de la photographie a été fixée au 7 janvier 1839, date à laquelle Arago présenta à l'Académie des Sciences l'invention de Daguerre : le daguerréotype. Mais l'histoire de la photographie commence bien avant notamment avec la camera obscura (chambre noire) qui est utilisée dès le XVI^e siècle pour des travaux topographiques. Les historiens de l'art ont également montré qu'elle était utilisée par des peintres, comme Vermeer ou les frères Van Eyck.

Le fonctionnement de cet ancêtre de l'appareil photo repose sur les propriétés des lentilles.

On modélise un appareil photo (**figure 1**) par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée "objectif", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

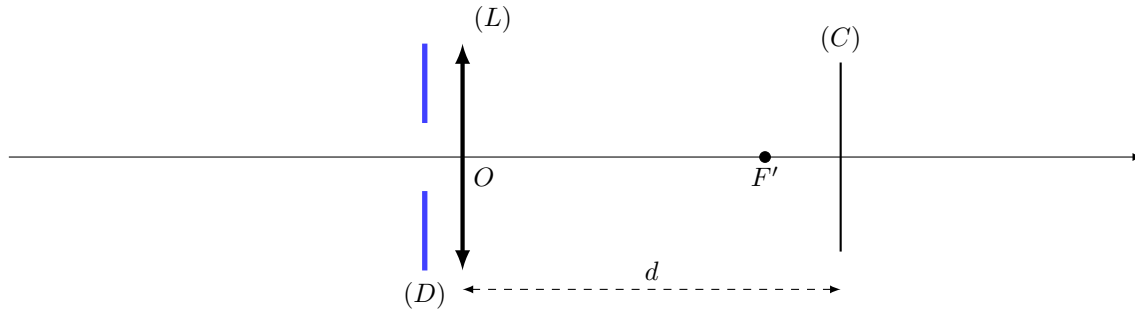


Figure 1 - Modélisation d'un appareil photo

La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif ; elle est comprise entre d_{\min} et d_{\max} .

À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance L devant l'objectif.

- Q.1** a) La lentille mince est utilisée dans les "conditions de Gauss". Préciser en quoi elles consistent.
 b) Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?
- Q.2** a) Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et $A'B'$ son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $A'B'$.
 b) Exprimer la taille $\overline{A'B'}$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h , f' et L . Calculer cette taille avec $f' = 50$ mm, $h = 5$ m et $L = 20$ m.

Rappel : l'objet AB et l'image $A'B'$ donnée par la lentille mince de centre O et de foyers principaux F (objet) et F' (image) dans les conditions de Gauss sont liés par les relations :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad ; \quad \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -(\overline{OF'})^2 \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

- Q.3** a) Quelle est la valeur de d lorsque l'objet est à l'infini ?
 b) Montrer qu'il existe une distance limite notée L_{\min} en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour des valeurs supérieures à L_{\min} .
 c) Exprimer L_{\min} en fonction de f' et d_{\max} .
 d) Calculer L_{\min} pour $f' = 50$ mm et $d_{\max} = 55$ mm.

Mécanique

Exercice 3 : Modélisation du mouvement d'une plateforme en mer :

On s'intéresse à la résolution d'équations du mouvement dans une approche classique afin d'étudier le mouvement d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un système à un degré de liberté considéré comme oscillateur harmonique : une masse est reliée à un ressort, avec ou sans amortissement, et peut être soumise à une excitation externe.

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (**figure 2**).

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m , liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ , pouvant subir une excitation externe de force \vec{F}_{exc} , et se déplaçant sur un support (**figure 3**). Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du support de la plateforme. L'amortisseur permet de prendre en compte l'effet de l'eau environnante et la force d'excitation externe celui des vagues qui frappent périodiquement la plateforme. La masse est supposée se déplacer selon une seule direction parallèle à l'axe

Ox en fonction du temps t .

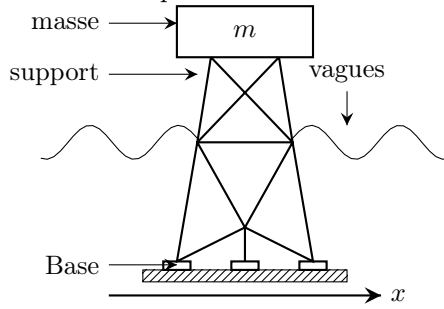


Figure 2 - Plateforme en mer soumise aux vagues marines.

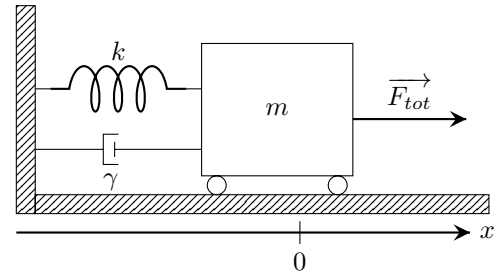


Figure 3 - Système masse (m), ressort (k), amortisseur (γ) et excitation externe (\vec{F}_{esc}).

Les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$. La force totale \vec{F}_{tot} agissant sur la masse correspond à la réaction normale \vec{R}_N de la base horizontale, à la force de frottement \vec{F}_d , à la force de rappel \vec{F}_k du ressort, au poids \vec{P} de la masse et à la force \vec{F}_{esc} d'excitation externe. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$ m. En l'absence d'action de l'amortisseur, la masse se déplace sur la base horizontale sans frottements.

Q.1 En effectuant une projection sur l'axe (Ox), montrer que \vec{P} et \vec{R}_N n'interviennent pas dans le bilan des forces.

1 Ressort sans amortissement et sans excitation

Q.2 Démontrer que l'équation du mouvement de la masse correspond à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

Q.3 La solution de cette équation prend la forme générale suivante :

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t)$$

avec A_0 et B_0 deux coefficients réels. Exprimer ω_0 en fonction des grandeurs caractéristiques du système et donner sa signification physique. De plus, en remarquant qu'à $t = 0$ s : $x(t) = x_0$ et $\dot{x}(t) = \dot{x}_0$, déterminer les expressions de A_0 et de B_0 en fonction de x_0 , \dot{x}_0 et de ω_0 .

Q.4 On cherche à reformuler l'équation précédente sous une forme plus compacte du type :

$$x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

Donner les expressions de R_0 et de ϕ_0 en fonction de x_0 , v_0 et de ω_0 .

Q.5 Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracer R_0 , x_0 et $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Q.6 En utilisant les expressions des énergies cinétique $K(t)$ et potentielle $U(t)$ du système, montrer que l'énergie totale $E(t)$ du système est alors :

$$E(t) = \frac{kR_0^2}{2} \quad (3)$$

Justifier le résultat obtenu.

Q.7 Représenter qualitativement $E(t)$, $K(t)$ et $U(t)$ en fonction de t .

2 Ressort avec amortissement et sans excitation

Q.8 La force de frottement que l'amortisseur exerce sur la masse est considérée comme linéaire, c'est-à-dire proportionnelle au vecteur vitesse \vec{v} de celle-ci : $\vec{F}_d = -\gamma\vec{v}$, avec γ constante d'amortissement (> 0). En considérant une projection sur l'axe Ox , démontrer que la position de la masse en fonction du temps suit l'équation du mouvement ci-après

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (4)$$

avec ω_0 défini en question **Q.3** et ζ à exprimer en fonction de γ , k et m .

Q.9 Dans le cas où $\zeta < 1$, exprimer $x(t)$ en fonction de deux constantes d'intégration A_d et B_d dont on donnera l'expression en fonction de x_0 , \dot{x}_0 , ζ , ω_0 et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$.

On utilisera pour cela les mêmes conditions initiales que celles utilisées en question **Q.3**.

Q.10 Montrer alors que l'on peut obtenir une forme du type

$$x(t) = R_d e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_d) \tag{5}$$

avec R_d et ϕ_d à préciser.

Q.11 Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $R_d e^{-\zeta\omega_0 t}$, x_0 et $2\pi/\omega_d$.

Q.12 Donner l'expression de $E(t)$ et commenter les cas où $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$.

Q.13 À l'aide d'un bilan de puissance instantanée, montrer que E est une fonction décroissante de t . À quoi cela est-il dû ?

Q.14 On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2 , tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = \tau_d$, avec τ_d : période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (5) et en considérant que $\zeta \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \simeq 2\pi\zeta \tag{6}$$

Q.15 Le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en **figure 4**.

En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure, déterminer k , ζ et γ .

Comment ce tracé serait modifié en fonction de la valeur de ζ ?

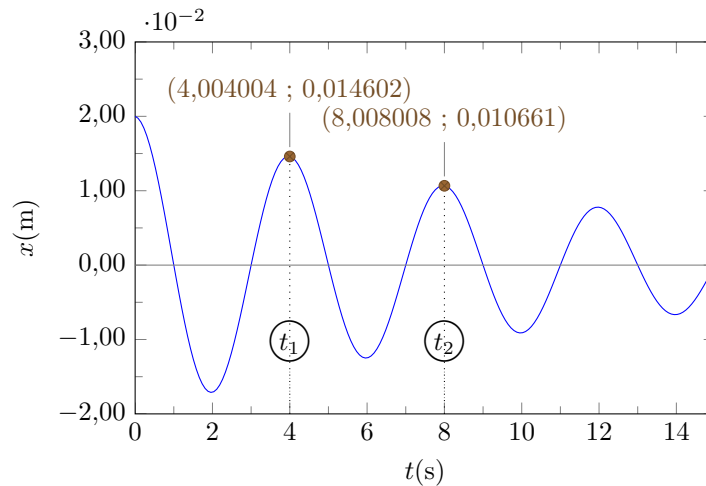


Figure 4 - Relevé du déplacement horizontal x (en m) de la plateforme de masse $m = 110$ tonnes en fonction du temps t (en s). Les deux temps t_1 et t_2 mentionnés en question **Q.14** sont indiqués.

3 Ressort avec amortissement et avec excitation

On envisage enfin le cas où le système est soumis à la fois aux effets d'amortissement et d'excitation.

On se limite ici à la réponse à une excitation harmonique sinusoïdale de pulsation ω produite par une force extérieure au système

$$\vec{F}_{exc}(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x \tag{7}$$

avec \vec{u}_x vecteur unitaire sur l'axe Ox et on se place dans le cas traité précédemment pour l'étude de l'amortisseur, c'est-à-dire $\zeta < 1$.

On admet de plus dans ce qui suit que la réponse du système dans le cas où amortisseur et excitation sont pris en compte peut s'écrire comme somme de la solution donnée en régime transitoire et de la contribution due à l'excitation :

$$x_{exc}(t) = X \cos(\omega t - \phi) \tag{8}$$

Q.16 Montrer que l'équation différentielle caractérisant le système devient alors :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \tag{9}$$

Q.17 En utilisant l'équation (8) et en privilégiant une représentation complexe, vérifier que :

$$\begin{cases} X = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} \\ \tan(\phi) = \frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases} \tag{10}$$

Q.18 Exprimer la grandeur $M = \frac{X}{F_0/k}$ en fonction de $r = \omega/\omega_0$ et expliciter le sens physique de M .

Q.19 Trouver la condition sur r puis sur ω pour laquelle M est maximale.

Q.20 Si l'on considère une période moyenne des vagues en mer de 8s, que peut-on conclure sur le mouvement de la plateforme ?

Exercice 4 : Spectromètre de masse

Le spectromètre de masse permet de mesurer la masse des particules chargées avec une telle précision qu'il peut servir à déterminer des compositions isotopiques. Dans cet exercice, on montre qu'il permet de déterminer la composition isotopique du mercure.

Une source émet des ions mercure $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$. Ces ions passent dans le spectromètre de masse où ils sont accélérés puis séparés afin de mesurer leur rapport isotopique.

Données :

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $d = 1,00 \text{ m}$; • $U = 1,00 \times 10^4 \text{ V}$; • $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$; • unité de masse atomique $1u = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
(masse d'un nucléon) ; | <ul style="list-style-type: none"> • $E_1 = 5,3 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; • $B_1 = 0,383 \text{ T}$; • $B_2 = 0,200 \text{ T}$; • $F_3O_1 = 1,44 \text{ m}$; • $F_3O_2 = 1,45 \text{ m}$. |
|---|---|

Accélération des ions.

Des ions de masse m et de charge $q > 0$ sont émis par une source située en F_1 , sans vitesse initiale. Ils sont accélérés entre F_1 et F_2 par une différence de potentiel U appliquée entre les plaques conductrices P_1 et P_2 .

Q.1 Préciser la plaque de potentiel le plus élevé et représenter sur le schéma le champ accélérateur \vec{E}_0 qui règne dans l'entrefer séparant F_1 et F_2 . Calculer numériquement $\|\vec{E}_0\|$.

Q.2 Établir l'expression littérale de la vitesse v_0 des ions sur la plaque P_2 .

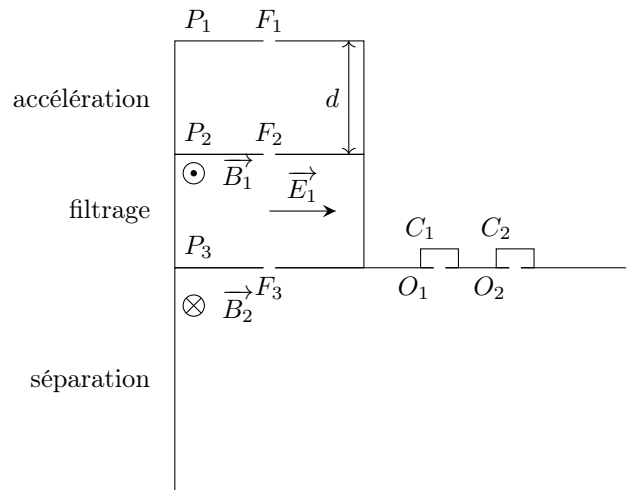
Q.3 Calculer numériquement v_{01} et v_{02} , les vitesses respectives des ions $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ à leur arrivée en F_2 .

Étant donné que l'hypothèse de vitesse nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique, il existe une certaine dispersion des vitesses en F_2 et il est nécessaire de réaliser un filtrage en vitesse pour améliorer les performances de l'appareil.

Filtre de vitesse.

Les ions traversent la plaque P_2 par la fente F_2 avec un vecteur vitesse perpendiculaire à P_2 . Ils entrent dans l'espace séparant P_2 et P_3 où règnent :

- un champ \vec{E}_1 uniforme situé dans le plan du schéma et parallèle à P_2 ;
- un champ \vec{B}_1 uniforme perpendiculaire au plan du schéma.



Q.4 Sous quelle condition les ions peuvent-ils avoir une trajectoire rectiligne les amenant des F_2 à F_3 ?

Q.5 En déduire que seuls les ions de vitesse $v_0 = \frac{\|\vec{E}_1\|}{\|\vec{B}_1\|}$ parviennent en F_3 .

Q.6 Calculer numériquement cette vitesse et en déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle valeur de \vec{E}_1 pour assurer le passage de $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ pendant 1 min puis on change sa valeur pour que les ions $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ passent pendant 1 min. Pendant cette opération, la valeur de \vec{B}_1 reste constante.

Séparation des ions.

Après F_3 , les ions pénètrent dans une région où ne règne qu'un champ magnétique uniforme \vec{B}_2 normal au plan du schéma. Ils sont déviés vers les collecteurs C_1 et C_2 .

Q.7 Montrer que le mouvement d'un ion dans cette région est uniforme.

- Q.8** Sachant que la trajectoire des ions est circulaire, déterminer son rayon R_1 pour les ions ${}^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et R_2 pour les ions ${}^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.
- Q.9** Déterminer le collecteur (C_1 ou C_2) qui reçoit ${}^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et celui qui reçoit ${}^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.
- Q.10** La distance δ qui sépare les points O_1 et O_2 paraît-elle suffisante pour installer des détecteurs de particules ?
- Q.11** Les quantités de charges reçues en 1 minute par les collecteur C_1 et C_2 sont $Q_1 = 1,20 \times 10^{-7}$ C et $Q_2 = 3,5 \times 10^{-8}$ C. Déterminer la composition du mélange d'ion et en déduire la masse atomique du mercure.

Exercice 5 : Étude de la comète 67P Churyomov - Gerasimenko

La comète étudiée s'appelle Churyomov - Gerasimenko, du nom des scientifiques ukrainiens M. Churyumov, l'utilisateur du télescope, et Mmm Gerasimenko, la comparatrice d'images, qui l'ont codécouverte en 1969. Cette comète mesure entre 3 km et 5 km de diamètre et tourne sur elle-même en une douzaine d'heures. Voilà à peu près tout ce que l'on savait sur la comète objet de Rosetta et Philae. Les estimations sur sa masse, varient, quant à elles, d'un facteur 10 et sa forme exacte restera un mystère jusqu'en juillet 2014 date de la première photo envoyée par Rosetta. Le noyau de la comète n'a pu être observé que depuis la Terre (le Very Large Telescope au Chili en lumière visible ou proche infrarouge) ou les satellites tournant autour de la Terre (Hubble en lumière visible, Spitzer en moyen infrarouge). De ces observations ont été tirées des courbes de lumières qui, elles-mêmes, ont permis de déterminer quelques unes de ses caractéristiques.

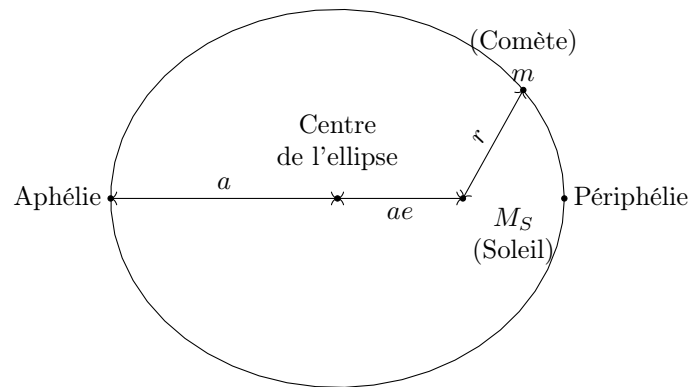


Figure 5 - Orbite elliptique d'excentricité e et de demi-grand axe a .

- Q.1** En appliquant le principe fondamental de la mécanique à une comète de masse m en orbite circulaire de rayon R autour du Soleil, retrouver la 3^e loi de Kepler. Dans le cas d'une orbite elliptique, on peut démontrer que cette relation se généralise remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de l'ellipse (voir **figure 5**). En déduire la relation entre le demi-grand axe a de l'ellipse parcourue par la comète, la période T de la comète, la masse du Soleil M_\odot et la constante de gravitation \mathcal{G} . Déterminer la valeur numérique de la période T_c de la comète Chury.
- On donne $2\pi a_c = 33 \times 10^{11}$ SI et on prendra $1 \text{ an} \simeq \frac{1}{3} \cdot 10^8$ s.
- Q.2** On ne suppose plus la trajectoire circulaire, et on note \vec{r} le vecteur position de la comète dans le référentiel héliocentrique et $r = \|\vec{r}\|$. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_S$ de la comète par rapport au Soleil. Montrer que la trajectoire de la comète est contenue dans un plan que l'on précisera. Déterminer l'expression de $C = \frac{\|\vec{\sigma}_S\|}{m}$ en fonction des coordonnées polaires (r, θ) de la comète dans ce plan.
- Q.3** Établir la relation $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{\text{eff}}(r)$ où E_m est l'énergie mécanique supposée négative de la comète et $E_{\text{eff}}(r)$ son énergie potentielle effective que l'on exprimera en fonction de C , \mathcal{G} , m , M_\odot et r . Tracer la représentation graphique de $E_{\text{eff}}(r)$, et positionner sur ce graphique E_m , l'aphélie r_{max} et le périgée r_{min} (voir **figure 5**).
- Q.4** Montrer qu'il existe une trajectoire circulaire correspondant à $r = r_{\text{min}} = r_{\text{max}} = r_0$ et $E_m = E_0$. Déterminer l'expression de r_0 en fonction de C , \mathcal{G} et M_\odot puis en déduire celle de E_0 en fonction de C , \mathcal{G} , M_\odot et m . On note respectivement $E_c(r)$ et $E_p(r)$ les énergies cinétique et potentielle de la comète à la distance r du Soleil, déterminer la relation entre $E_c(r_0)$ et $E_p(r_0)$.
- Q.5** Établir l'équation du second degré en r dont r_{min} et r_{max} sont solutions, qui permet de déduire l'expression de E_m en fonction de \mathcal{G} , m , M_\odot et a . On donnera cette expression. après avoir montré que son discriminant est bien positif, résoudre l'équation et déterminer la relation liant e à E_m , C , a et m .
- Q.6** Quelle est la propriété de la vitesse aréolaire de la comète, rapport de la surface balayée par le rayon vecteur de la comète sur le temps mis par la parcourir ? Quelle est l'astronome qui a identifié cette propriété qui porte son nom ? Sachant que l'air d'une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a est $S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$, déterminer la relation entre la période de la comète et le demi-grand axe de l'ellipse. Commenter le résultat obtenu.

Rosetta a bénéficié de 4 assistances gravitationnelles afin d'acquérir l'énergie nécessaire pour rejoindre la comète sur son orbite. La précision requise pour l'accomplissement de cet exploit est absolument insensée : fenêtre de quelques kilomètres entre les objets sur des orbites gravitationnelles à des vitesses de l'ordre du kilomètre par seconde, à plusieurs centaines de millions de kilomètres de la Terre. Peu de gens ont pris conscience de l'exploit réalisé par les ingénieurs de l'Agence Spatiale Européenne.

Q.7 Qu'entend-on par assistance gravitationnelle ? On étaiera sa réponse par un schéma explicatif.

Données :

Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
Unité astronomique	$1 \text{ ua} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
Aphélie de la comète Churry	$r_{\max} = 5,70 \text{ ua}$
Périphélie de la comète Churry	$r_{\min} = 1,30 \text{ ua}$

I- Analyse d'un circuit électrique

Des signaux issus d'électrodes utilisées pour mesurer les caractéristiques du globe oculaires ne sont pas exploitables directement et doivent être amplifiés et filtrés. Les électrodes sont reliées à l'amplificateur d'instrumentation représenté à la figure 1. Celui-ci comporte 3 ALI (notés AL1, AL2, AL3) aucune connaissance sur le fonctionnement de l'ALI n'est nécessaire.

On donne : $R = 100\text{ k}\Omega$, $R' = 2\text{ k}\Omega$.

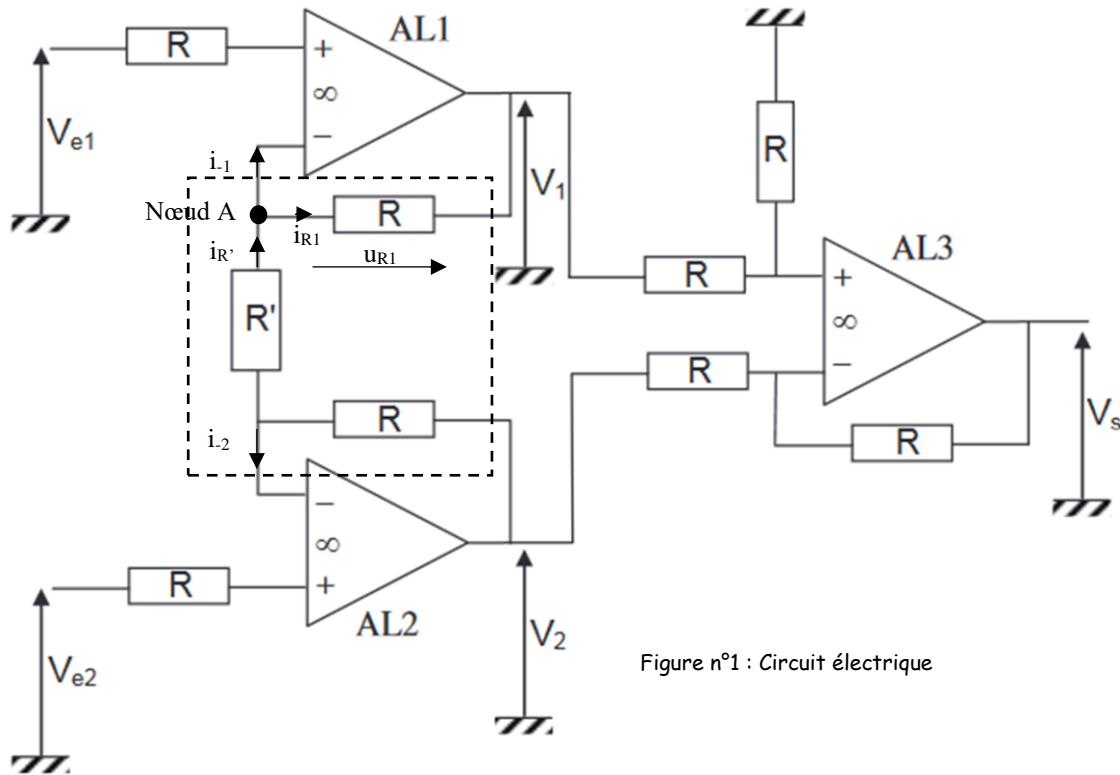


Figure n°1 : Circuit électrique

On ne considère pour l'instant que la portion du circuit placée dans le rectangle en tirets.

- 1°/ Etablir une relation entre les courants i_{R1} , $i_{R'}$ et i_1 .
- 2°/ Définir, sur un schéma reproduisant la portion de circuit située dans le rectangle en tirets, la tension $u_{R'}$ aux bornes de la résistance R' pour qu'elle soit en convention récepteur.
- 3°/ Ecrire la relation entre u_{R1} et i_{R1} pour la résistance R .
- 4°/ Etablir une relation entre les tensions V_1 , V_2 , u_{R1} , $u_{R'}$ et u_{R2} .
- 5°/ On admet que les courants i_1 et i_2 sont nuls du fait du fonctionnement des ALI AL1 et AL2. Déterminer l'expression de la tension $u_{R'}$ en fonction de V_1 , V_2 , R et R' .

II- Simulation de la temporisation d'un éclairage de voiture.

Lors de l'arrêt du moteur des voitures actuelles, l'habitacle s'éclaire pendant quelques secondes (entre 25 et 30 secondes). Un élève essaye de simuler le fonctionnement du circuit d'une lampe intérieure de voiture à l'aide du matériel disponible en salle de TP.

Il réalise le circuit de la figure n°2 :

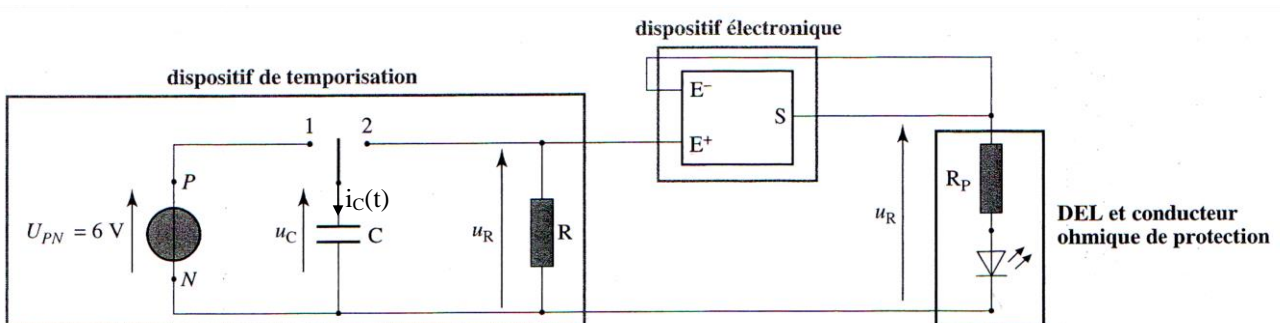


Figure n°2 : Circuit simulant un dispositif de temporisation d'un éclairage intérieur de voiture.

On ne considère le fonctionnement du dispositif électronique comme étant idéal, c'est-à-dire qu'il alimente la DEL avec une tension égale à $u_R(t)$ en fournissant le courant nécessaire. De plus aucun courant ne pénètre dans le dispositif électronique par la borne E^+ .

- 1°/ Quelle relation existe-t-il entre la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur C et le courant $i_C(t)$ dans celle-ci.
- 2°/ L'interrupteur est en position 1 depuis longtemps quelle est la relation entre U_{PN} et u_C .
- 3°/ On choisit l'instant où l'on bascule l'interrupteur en position 2 comme instant $t = 0$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$.
- 4°/ Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $u_C(t)$.
- 5°/ Déterminer l'expression de $u_R(t)$.
- 6°/ Déterminer le temps durant lequel la DEL reste allumée (on considère que la diode est allumée tant que $u_R \geq 0$ à 1% près).
- 7°/ Quelle est la durée de l'éclairement si l'on choisit pour $R = 10 \text{ k}\Omega$ et pour $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$? Est-ce correct ? Sinon proposer des valeurs de R et C plus appropriées.

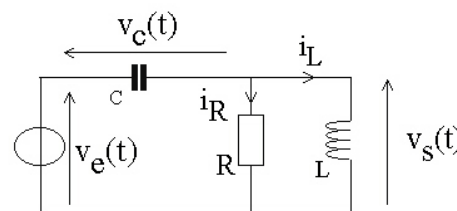
III- Etude d'un régime transitoire du second ordre : tension aux bornes d'une bobine.

$v_e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E . A $t = 0$, $v_e(t)$ passe brusquement de 0 à E , le condensateur n'étant pas chargé et aucune énergie n'étant accumulée dans la bobine.

On donne : $E = 10 \text{ V}$; $R = 4 \text{ k}\Omega$; $L = 0,16 \text{ H}$; $C = 10 \text{ nF}$

On pose : $\lambda = \frac{1}{2RC}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

- 1°/ A $t = 0^+$, $v_e(t)$ vient juste de passer brusquement à E . Déterminer, en les justifiant, la valeur des grandeurs électriques suivantes à l'instant $t = 0^+$: $i_L(0^+)$; $i_R(0^+)$; $v_C(0^+)$; $v_S(0^+)$.



- 2°/ Quelle est, à cet instant $t = 0^+$, la valeur de $\frac{di_L(t)}{dt}$? On justifiera la réponse.

- 3°/ Quelle est la valeur de $v_S(t)$ quand le régime permanent est atteint. On justifiera la réponse.

- 4°/ Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $i_L(t)$. On écrira cette équation différentielle avec les paramètres λ et ω_0 et on travaillera avec cette équation différentielle normalisée dans la suite de l'exercice.

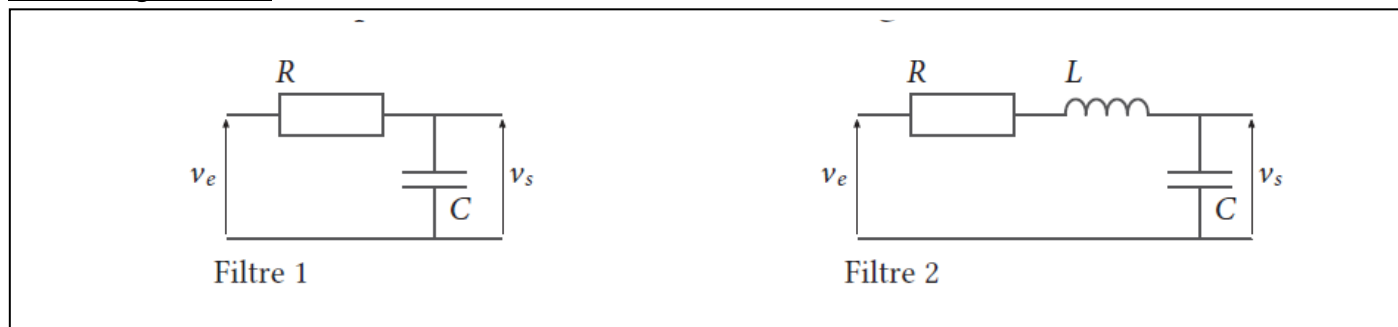
- 5°/ Etablir l'expression littérale de $i_L(t)$. On exprimera les constantes d'intégration.

- 6°/ En déduire l'expression littérale de $v_S(t)$.

- 7°/ Exprimer la pseudo période T de $v_S(t)$. On donnera une expression littérale et le résultat numérique.

- 8°/ Tracer l'allure de $v_S(t)$.

IV- filtrage linéaire



Etude du filtre 1

- 1- Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{V_S}{V_e}$
- 2- Déterminer le comportement asymptotique du filtre.
- 3- Tracer l'allure du diagramme de Bode.
- 4- Déterminer la fréquence de coupure à - 3 dB du filtre.

5- Prévoir le comportement du filtre 2 à fréquence nulle puis à fréquence infinie en remplaçant la bobine et le condensateur par un interrupteur fermé ou ouvert. En déduire la nature du filtre 2.

Etude du filtre 2 :

- 6- Etablir la fonction de transfert \underline{H} du filtre 2.

7- Pour le filtre 2, on définit le facteur de qualité par $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et la pulsation propre par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; exprimer la fonction de transfert \underline{H} du filtre 2 en fonction de ω , ω_0 et Q

La tension d'entrée $v_e(t)$ du filtre 2 est sinusoïdale, d'amplitude $V_e = 0,5 \text{ V}$. La fréquence f de la tension d'entrée coïncide avec la fréquence propre du filtre 2 : $f = f_0 = \frac{1}{2\pi} \omega_0$ et le facteur de qualité du filtre 2 vaut $Q = 10$. On prend $v_e(t)$ comme référence de phase.

8- Déterminer la tension de sortie $v_s(t)$ du filtre 2. Quel phénomène physique observe-t-on ?

9- Représenter sur le même graphe l'allure de $v_e(t)$ et celle de $v_s(t)$. L'abscisse sera graduée par $\frac{T_0}{4}$ avec $T_0 = \frac{1}{f_0}$.

Etude d'un quatrième filtre : « filtre 4 »

Le filtre 4 est caractérisé par la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{U_2}{U_1}$

Cette fonction de transfert s'exprime sous la forme :

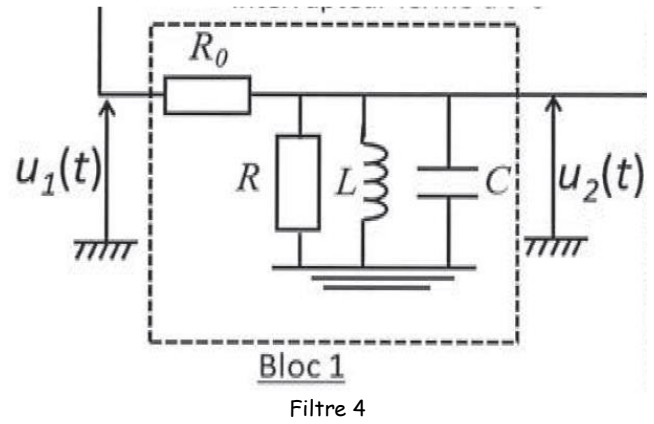
$$\underline{H} = \frac{A}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec } A = 0,1 \text{ et } Q = 25$$

10- Par analyse de la fonction de transfert, déterminer la nature de ce filtre ?

11- Exprimer l'impédance équivalente \underline{Z} du dipôle constitué par l'ensemble R, L et C dans le bloc1 (page2).

12- Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{U_2}{U_1}$ en fonction de R_0 et \underline{Z} .

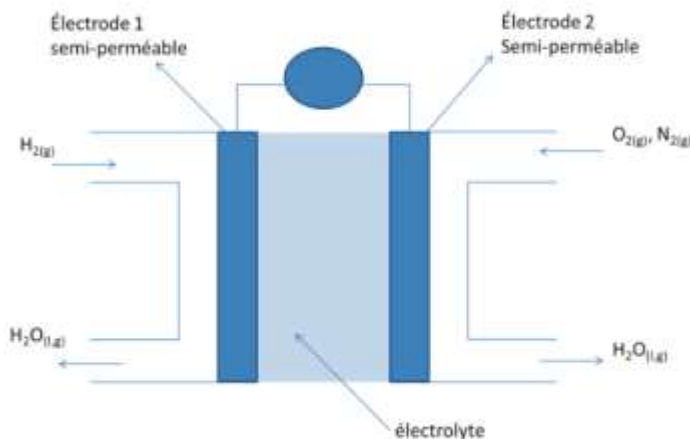
5- Identifier A, ω_0 et Q en fonction de R_0 , R, L et C.



I- Les piles à combustibles à oxyde solide

Le principe de la pile à combustible consiste à utiliser du dihydrogène pour stocker et transporter l'énergie. Une pile à combustible est un assemblage de cellules élémentaires, en nombre suffisant pour assurer la production électrochimique d'électricité dans les conditions de tension et d'intensité voulues. De façon générale, le fonctionnement électrochimique d'une cellule élémentaire de pile à combustible peut être représenté selon le schéma suivant :

Chaque cellule élémentaire est constituée de deux compartiments disjoints alimentés chacun en gaz dihydrogène et



dioxygène. Les électrodes sont séparées par un électrolyte solide qui laisse passer les anions oxygène. Les couples d'oxydoréduction mis en jeu dans la réaction sont : $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$ et $O_{2(g)} / H_2O_{(l)}$.

I- Généralités

I.1- Indiquer les configurations électroniques fondamentales des atomes constitutifs des réactifs et du produit. En déduire les schémas de Lewis des trois molécules.

I.2- A partir des informations du schéma, attribuer et justifier le choix de la cathode et de l'anode aux électrodes 1 et 2, ainsi que le sens de circulation des électrons.

I.3- Ecrire les demi-équations électroniques pour chaque couple mis en jeu, quand la pile débite.

I.4- Le réactif qui est oxydé est appelé le combustible de la pile. Parmi les espèces chimiques présentes dans les couples, laquelle constitue le combustible ?

I.5- En déduire l'équation de la réaction modélisant la transformation ayant lieu dans la cellule de réaction.

Dans un véhicule motorisé fonctionnant grâce à une pile à combustible, on estime à 1,5 kg la masse de dihydrogène nécessaire pour parcourir 250 km.

I.6- Calculer la quantité de matière de dihydrogène correspondant à cette masse, puis le volume occupé par cette quantité de gaz à 20°C sous pression atmosphérique.

I.7- Quel est l'avantage pour l'environnement de l'utilisation d'une pile à combustible au dihydrogène par rapport à un carburant classique ? Quel en est l'inconvénient majeur

II- Electrolyse de l'alumine

Pour l'électrolyse de l'alumine, les électrodes sont constituées d'aluminium liquide et de graphite (carbone) solide. On observe un dégagement gazeux de dioxyde de carbone. Dans ce milieu et à cette température, on obtient des solides ioniques totalement dissociés en leurs ions constitutifs en rajoutant un solvant.

Seuls les ions de ces solides sont alors à prendre en compte pour cette question.

II.1- Quels sont les ions constitutifs de l'alumine, Al_2O_3 ? Justifier votre réponse.

II.2- Quelle est la nature de l'électrode sur laquelle a lieu la formation de dioxyde de carbone gazeux ? Proposer une équation pour la réaction électrochimique ayant lieu à cette électrode.

II.3- Quelle est la nature de l'électrode sur laquelle a lieu la formation d'aluminium liquide ? Proposer une équation pour la réaction électrochimique ayant lieu à cette électrode.

II.4- Proposer une équation pour la réaction d'électrolyse de l'alumine.

III- Magnésium en solution aqueuse

Traité thermiquement entre 1 500 °C et 2 000 °C, l'oxyde de magnésium (magnésie) est particulièrement stable même à très haute température. Il trouve ses principales utilisations comme matériau réfractaire, résistant à très haute température

et est aussi utilisé pour l'obtention industrielle du magnésium. Nous allons nous intéresser à la chimie du magnésium en solution aqueuse.

Le diagramme potentiel-pH du magnésium est tracé dans l'annexe 2 pour une concentration de travail $c_{tr} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ à 25°C .

III.1- Déterminer le potentiel standard du couple Mg^{2+}/Mg d'après le diagramme potentiel-pH.

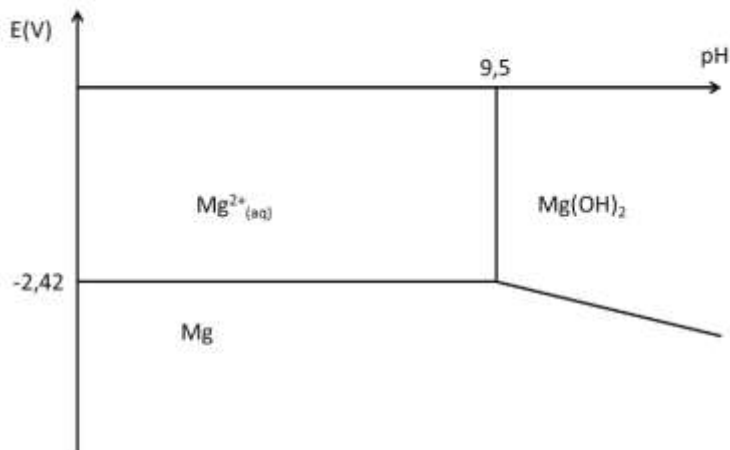
III.2- Calculer le produit de solubilité K_s de l'hydroxyde de magnésium $\text{Mg}(\text{OH})_2$.

Une canalisation en fonte (alliage à base de fer) est enterrée dans le sol. Pour la protéger de la corrosion on la relie à une électrode de magnésium, elle aussi enterrée.

III.3- Quel rôle joue l'électrode de magnésium : est-elle anode ou cathode ? Pourquoi ?

Proposer une demi-équation pour la réaction électronique en milieu acide.

III.4- Exprimer la durée de vie Δt d'une électrode en fonction de sa masse m , de l'intensité du courant de protection I supposée constante, de la constante de Faraday F et de la masse molaire du magnésium.



Données utiles :

Le volume molaire d'un gaz parfait : $V_{\text{mol}} = 24 \text{ L.mol}^{-1}$ à 20°C sous une atmosphère ($1 \text{ atm} = 1\,013,25 \text{ hPa}$)

Constante de dissociation de l'eau : $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$

Nombre de Faraday : $F \approx 10^5 \text{ C.mol}^{-1}$

$$A = \frac{RT}{F} \ln(10) = 0,059 \text{ V à } 25^\circ\text{C}$$

$$E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44 \text{ V.}$$

Tableau périodique des éléments :

TABLEAU PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS																			
GROUPE		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
PERIODE		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		H																	He
2		Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
3		Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
4		K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
5		Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
6		Cs	Ba	La-Lu	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
7		Fr	Ra	Ac-Lr	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Uu	Uu	Uu	Uu	Uu	Uu	Uu	Uu	Uu
Lanthanides		La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu			
Actinides		Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr			

IV- Suivi cinétique de la décoloration de l'érythrosine B

L'érythrosine B (E127) est un colorant azoïque apparenté à l'éosine et utilisé pour colorer les aliments ou pour teinter les préparations microscopiques et les médicaments. L'ensemble des manipulations est réalisé à 298 K.

Données à 298 K :

$$E^\circ(\text{ClO}^-_{(\text{aq})}/\text{Cl}^-_{(\text{aq})}) = 0,89 \text{ V} ; E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}_{(\text{aq})}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})}) = 0,08 \text{ V} ; E^\circ(\text{I}_2_{(\text{aq})}/\text{I}^-_{(\text{aq})}) = 0,54 \text{ V} ;$$

1. Dosage de la solution d'hypochlorite de sodium commerciale

Après avoir introduit un volume $V_0 = 2,00 \text{ mL}$ de la solution d'hypochlorite de sodium commerciale ($\text{Na}^+ + \text{ClO}^-$)_(aq) dans une fiole jaugée de volume $V_F = 100 \text{ mL}$, on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge.

A un volume $V_E = 10,0 \text{ mL}$ de cette solution fille, on ajoute environ 10 mL d'une solution d'iodure de potassium ($\text{K}^+ + \text{IO}_3^-$)_(aq) à 15% en masse et 5,0 mL d'acide éthanóique $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}_{(\text{aq})}$ à $3,0 \text{ mol.L}^{-1}$.

L'échantillon obtenu est titré par une solution de thiosulfate de sodium ($2 \text{Na}^+ + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$)_(aq) de concentration $C = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$: le volume équivalent est égal à $V_{\text{eq}} = 16,0 \text{ mL}$.

1°/ Déterminer l'équation de la réaction entre les ions hypochlorite $\text{ClO}^-_{(\text{aq})}$ et les ions iodure $\text{I}^-_{(\text{aq})}$

2°/ Déterminer la constante de la réaction, prévoir le caractère favorisé ou défavorisé de la réaction.

3°/ Déterminer l'équation de la réaction de titrage du diiode $\text{I}_2_{(\text{aq})}$ par les ions thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})}$

4°/ Prévoir qualitativement le caractère favorisé ou défavorisé de la réaction.

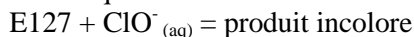
5°/ Sachant que les ions iodure et l'acide éthanóique sont introduits en excès, déterminer la concentration en ions hypochlorite dans la solution commerciale.

2. Suivi cinétique de la décoloration de l'érythrosine B

On prépare dans quatre béchers les solutions suivantes :

Solution n°	①	②	③	④
Solution d'hypochlorite de sodium commerciale	3,0 mL	6,0 mL	9,0 mL	12,0 mL
Eau distillée	17,0 mL	14,0 mL	11,0 mL	8,0 mL

A chacune des quatre solutions précédentes, on ajoute à un instant pris comme origine des temps 10 mL d'une solution aqueuse d'érythrosine B (E127) de concentration $8,4 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ (la concentration initiale en érythrosine B après mélange vaut donc $[\text{E127}]_0 = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$). On suit alors l'évolution temporelle de l'absorbance à 530 nm, longueur d'onde pour laquelle on considère que seul le colorant azoïque absorbe. La décoloration de la solution est due à la réaction supposée totale d'équation :



Connaissant le coefficient d'absorption molaire ε de l'érythrosine B à cette longueur d'onde ($\varepsilon = 8,2 \cdot 10^4 \text{ L.mol}^{-1}.\text{cm}^{-1}$), on détermine l'évolution temporelle de la concentration en érythrosine B.

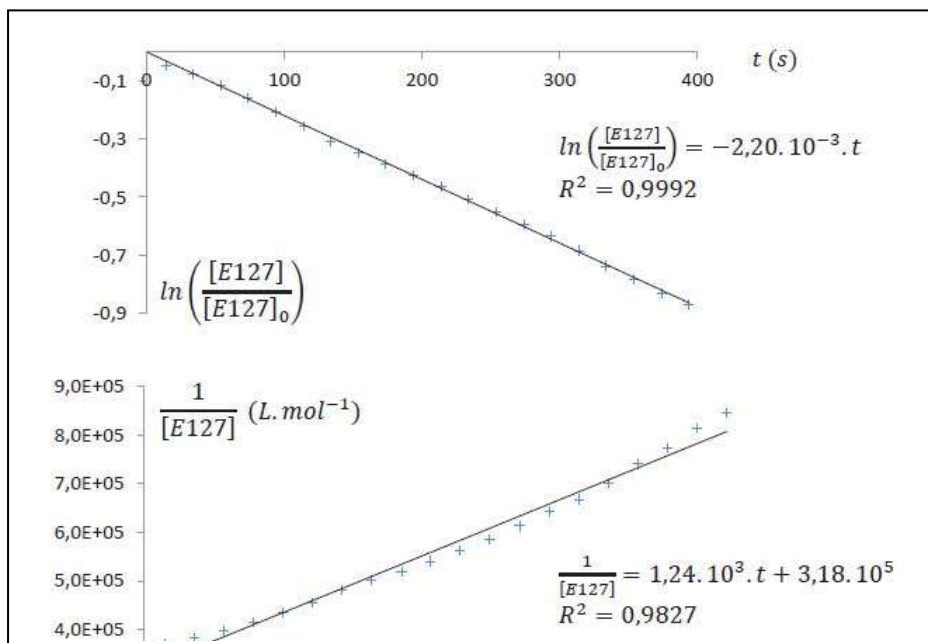
On suppose que la loi de vitesse s'écrit sous la forme :

$$v = k \cdot [\text{E127}]^\alpha \cdot [\text{ClO}^-]^\beta$$

6°/ En comparant les concentrations initiales de réactifs, proposer une expression simplifiée de la loi de vitesse. On note k_{app} la constante de vitesse apparente.

7°/ Dans l'hypothèse où α est égal à 1, écrire l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la concentration en érythrosine B et donner sa solution.

8°/ Dans l'hypothèse où α est égal à 2, écrire l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la concentration en érythrosine B et donner sa solution.



9°/ A partir des deux courbes précédentes obtenues à partir de la solution ①, déterminer la valeur probable de α . En déduire la valeur de la constante de vitesse apparente $k_{app}^{\textcircled{1}}$ à 298 K, en précisant l'unité choisie.

On exploite de même les résultats des manipulations ①, ②, ③ et ④.

Solution n°	①	②	③	④
$[\text{ClO}^-]_0$ (mol.L ⁻¹)	0,080	0,160	0,240	0,320
k_{app} (unité S.I.)	?	$4,40 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$	$8,80 \cdot 10^{-2}$

Pour une manipulation analogue correspondant à une concentration initiale en ions hypochlorite $[\text{ClO}^-]_0$ égale à $1,00 \cdot 10^{-1}$ mol.L⁻¹, la constante de vitesse apparente k_{app} serait égale à $2,75 \cdot 10^{-2}$ unités S.I.

10°/ Déterminer la valeur de l'ordre partiel β et la valeur de la constante de vitesse k à 298 K, en précisant l'unité choisie.

V- Dosage potentiométrique des ions cuivre (II) dans la bouillie bordelaise

Donnée :

Masse molaire du cuivre : $M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq})/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq})) = 0,08 \text{ V}$; $E^\circ(\text{I}_3^-(\text{aq})/\text{I}^-(\text{aq})) = 0,53 \text{ V}$;

La bouillie bordelaise est un mélange de chaux et de sulfate de cuivre ($\text{Cu}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$) mis au point pour le traitement de la vigne contre le mildiou par Millardet en 1882. Elle est commercialisée sous forme d'une poudre bleue qui contient 20% de cuivre (pourcentage massique en cuivre métal).

On se propose ici de vérifier la teneur en cuivre de la bouillie bordelaise grâce à un dosage iodométrique suivi par potentiométrie. Pour cela, on exploite le mode opératoire suivant :

Etape 1 : On dissout une masse $m = 15,9 \text{ g}$ de bouillie bordelaise dans de l'acide chlorhydrique concentré ($\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$) (aq). Après filtration du surnageant sur célite, le volume est ajusté à $V_{\text{fiolle}} = 1,00 \text{ L}$ par addition d'acide chlorhydrique concentré. On obtient une solution (S) de sulfate de cuivre ($\text{Cu}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$) (aq)

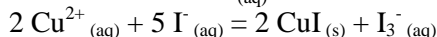
Etape 2 : On introduit dans un bécher :

- un volume $V_s = 20,0 \text{ mL}$ de la solution (S) à doser ;

- un volume $V_{\text{eau}} = 30 \text{ mL}$ d'eau distillée ;

- un volume $V_{\text{KI}} = 50 \text{ mL}$ d'iodure de potassium ($\text{K}^+ + \text{I}^-$) (aq) de concentration $2,00 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Les ions cuivre (II) Cu^{2+} (aq) réagissent avec les ions iodure I^- (aq) selon la réaction :



Etape 3 : On introduit dans le bécher deux électrodes de platine dans lesquelles on impose la circulation d'un courant très faible de l'ordre de $1 \mu\text{A}$. A l'une des électrodes se produit une oxydation, à l'autre une réduction.

On titre alors les ions triiodure $\text{I}_3^-(\text{aq})$ par une solution de thiosulfate de sodium ($2 \text{Na}^+ + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$) (aq) de concentration $C = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1°/ Ecrire les demi-équations des deux couples en jeu.

2°/ Ecrire l'équation de la réaction de dosage.

3°/ Déterminer l'expression et la valeur de la constante de la réaction.

On obtient un volume équivalent $V_{\text{éq}} = 10 \text{ mL}$.

4°/ Déterminer le pourcentage massique w en cuivre dans la bouillie bordelaise et confronter le résultat à l'indication de l'étiquette (donnée : $\frac{63,5}{15,9} \approx 4,00$).