Matrices et applications linéaires

Exercice 1 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = I_n$.

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \right.$

Montrer que $f \in \mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$. En déduire que $BA = I_n$ et que A est inversible, d'inverse B.

Exercice 2 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, et l'application f définie sur E par $f(P) = (X+1)P' - P$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$, puis déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$.
   L'application f est-elle bijective ?
2. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de E.
   Déterminer la matrice A' de f dans celle-ci.
3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   Donner une relation entre A, A' et P. Vérifier ce résultat sans calculer P^{-1}.

Exercice 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. On note F et G les sous espaces caractéristiques de f.
   (a) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F, et une base $\mathscr{B}_2$ de G.
   (b) Montrer que $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Application : résoudre le système différentiel $(S)\left\{ \begin{array}{l} 3x' = -x + 2y - 2z \\ 3y' = 2x - y - 2z \\ 3z' = -2x - 2y - z \end{array} \right.$,
   où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables,
   $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$ et $z' = \dfrac{dz}{dt}$.

Exercice 4 Pour tout réel $a > 0$, on considère l'application Δ_a définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\Delta_a(P)(X) = \frac{1}{2a}(P(X+a) - P(X-a))$$

0. Montrer que la limite de $\Delta_a(P)(X)$ lorsque a tend vers 0 est $P'(X)$.

A - Étude globale

1. Montrer que Δ_a est un endomorphisme.
2. Évaluer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de $\Delta_a\left(X^n\right)$.
3. En déduire $\ker\left(\Delta_a\right)$ le noyau de Δ_a ainsi que son image $\operatorname{Im}\left(\Delta_a\right)$.

B - Une restriction On note Δ_a^4 la restriction de Δ_a à $\mathbb{R}_4[X]$.

1. Écrire la matrice représentative M_a de Δ_a^4 dans la base canonique $\mathcal{B}_4 = \left(1, X, X^2, X^3, X^4\right)$ de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Quel est son noyau ? Est-ce un automorphisme ?
3. Donner le rang de Δ_a^4 et expliciter son image.

C - Régularisation

1. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes s'annulant en 0 . Montrer qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel admettant $\mathcal{B}_4^* = \left(X, X^2, X^3, X^4\right)$ comme base.
2. On note Δ_a^* la restriction de Δ_a à E. Justifier que $\Delta_a^* : E \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ est un isomorphisme.
3. Écrire puis inverser sa matrice représentative M_a^* dans le couple de bases $(\mathcal{B}_4^*, \mathcal{B}_3)$ où $\mathcal{B}_3 = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Note : On obtient tout particulièrement que $(\Delta_a^*)^{-1}\left(X^2\right) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{a^2}{3}X$.

D - Primitive discrète

On pose $a = \frac{1}{2}$ de sorte que $\Delta_{\frac{1}{2}}(P)(X) = P\left(X + \frac{1}{2}\right) - P\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

1. Évaluer par télescopage la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[P\left(k + \frac{1}{2}\right) - P\left(k - \frac{1}{2}\right)\right]$
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$. En introduisant un antécédent P de Q par $\Delta_{\frac{1}{2}}$, simplifier à l'aide de la question **D** 1. la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Q(k)$.
3. Retrouver ainsi la formule usuelle donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ (on pourra utiliser la note de la section **C**).