Devoir maison n° 21

A rendre le mercredi 13 ou lundi 18 mai 2026

Exercice 1 On identifie $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en identifiant $x=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ à $X=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

On considère alors la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$ et l'application $p:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ X & \longmapsto & AX\end{array}\right.$ associée.

1. Démontrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer A^2. En déduire que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

   On notera F et G les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G.

3. Déterminer F et G (bases et dimensions).
4. Trouver une matrice B telle que $s : X \longmapsto BX$ soit la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G.

   On explicitera les coefficients de B

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$.

Il est clair que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Nous noterons $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$?
2. Déterminer les limites de f et de $x\mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une droite asymptote en $+\infty$?

3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Expliciter le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.

   En déduire l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 et la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de cette tangente.

5. Expliciter le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 1.

   En déduire l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 et la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de cette tangente.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en faisant bien apparaître tous les résultats précédents.

7. Soit F la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0.

   Expliciter le développement limité à l'ordre 4 de F au voisinage de 0.