

Correction du devoir maison n° 19

Exercice 1 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_m : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + mz, x + my + z, mx + y + z) \end{array}$$

1. Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & f_m(\lambda u + \mu v) \\ = & (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + m(\lambda z + \mu z'), \lambda x + \mu x' + m(\lambda y + \mu y') + \lambda z + \mu z', \\ & m(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z') \\ = & \lambda(x + y + mz, x + my + z, mx + y + z) + \mu(x' + y' + mz', x' + my' + z', mx' + y' + z') \\ = & \lambda f_m(u) + \mu f_m(v). \end{aligned}$$

Donc $f_m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. \mathbb{R}^3 étant de dimension finie, f_m est bijective ssi f_m est injective ssi $\text{Ker}(f_m) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f_m) & \iff f_m(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 \\ (2-m-m^2)z = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

qui est échelonné de rang 3 ssi $m-1 \neq 0$ et $2-m-m^2 \neq 0$ ssi $m \neq 1$ et $m \neq -2$.

On en déduit que f_m est un automorphisme de \mathbb{R}^3 ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

3. (a) Si $m = -2$, on a :

$$u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f_{-2}) \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \iff u = z(1, 1, 1).$$

Donc

$\text{Ker}(f_{-2})$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $u_1 = (1, 1, 1)$, de dimension 1.

(b) Par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f_{-2})) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f_{-2})) = 3 - 1 = 2$.

$f_{-2}(1, 0, 0) = (1, 1, -2) = v_1$ et $f_{-2}(0, 1, 0) = (1, -2, 1) = v_2$, qui ne sont pas colinéaires.

Donc $\text{rg}(v_1, v_2) = 2 = \dim(\text{Im}(f_{-2}))$ et

$$\boxed{\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2) \text{ est une base de } \text{Im}(f_{-2}), \text{ de dimension } 2}.$$

(c) On considère la matrice dont les colonnes sont celles des coordonnées de u_1, v_1, v_2 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

qui est échelonnée de rang 3. Donc $\text{rg}(u_1, v_1, v_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc (u_1, v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^3 et

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u_1) \oplus \text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Ker}(f_{-2}) \oplus \text{Im}(f_{-2})}.$$

(d) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique $w_1 \in \text{Ker}(f_{-2})$ et un unique $w_2 \in \text{Im}(f_{-2})$ tels que $(x, y, z) = w_1 + w_2 = au_1 + bv_1 + cv_2$ d'après les questions précédentes et $p(x, y, z) = w_1$

$$(x, y, z) = w_1 + w_2 = au_1 + bv_1 + cv_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vu que A est inversible.

$$\text{L'algorithme de Gauss Jordan (à faire) donne } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient $a = \frac{x + y + z}{3}$, d'où $\boxed{p(x, y, z) = \frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1)}$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 2 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(P + \lambda Q) = X^2(P + \lambda Q)'' + aX(P + \lambda Q)' + b(P + \lambda Q) = X^2(P'' + \lambda Q'') + aX(P' + \lambda Q') + b(P + \lambda Q) = X^2P'' + aXP' + bP + \lambda(X^2Q'' + aXQ' + bQ) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$$

De plus, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors on a $\deg(P) \leq 3$, $\deg(P') \leq 2$ et $\deg(P'') \leq 1$ donc $\deg(X^2P'') \leq 3$, $\deg(aXP') \leq 3$ et donc $\deg(\varphi(P)) \leq 3$.

Finalement, $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])}$

2. Dans cette question $a = 5$ et $b = 1$.

$$\varphi(1) = 1, \varphi(X) = 6X\varphi(X^2) = 13X^2 \text{ et } \varphi(X^3) = 22X^3$$

Donc $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(1); \varphi(X); \varphi(X^2); \varphi(X^3)) = \text{Vect}(1; X; X^2; X^3) = \mathbb{R}_3[X]$ Donc φ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension finie. Donc

$$\boxed{\varphi \in GL(\mathbb{R}_3[X]).}$$

3. Dans cette question $a = 3$ et $b = -3$ et on a

$$\varphi(1) = -3; \varphi(X) = 0; \varphi(X^2) = -7X^2 \text{ et } \varphi(X^3) = 12X^3.$$

Donc $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(1; X^2; X^3)$ et, comme $(1; X^2; X^3)$ est libre, on a $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(1; X^2; X^3) = 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \text{rg}(\varphi) = 4 - 3 = 1$.

Comme $\varphi(X) = 0$, X est un polynôme non nul de $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{rg}(X) = 1 = \dim(\text{Ker}(\varphi))$.

Donc (X) est une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et $\boxed{\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X).}$