NOM : .... **Lundi 4 mai 2026**

Test n° 19

Sujet A

1. Si $(A_1, \ldots, A_k)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles alors, pour tout événement B de probabilité non nulle, écrire la formule de Bayes :

2. Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

   (b) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

   (c) On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

3. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par

$$\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X-1)P'$$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer une base et la dimension de Ker (φ) et Im (φ).

   (c) Montrer que Ker $(\varphi) \oplus$ Im $(\varphi) = E$.

   (d) Soit p la projection vectorielle sur Ker (φ) parallèlement à Im (φ).
   Déterminer $\varphi \circ p$ et $p \circ \varphi$.

NOM : .... **Lundi 4 mai 2026**

Test n° 19

Sujet B

1. Si $(A_1, \dots, A_k)$ est une famille d'événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) > 0$, écrire la formule des probabilités composées :

2. On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges.

   (a) On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ?

   (b) Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

3. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par

$$\forall P \in E, \varphi(P) = P - (X+1)P'$$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ et $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \oplus \mathrm{Im}\,(\varphi) = E$.

   (d) Soit p la projection vectorielle sur $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.
   Déterminer $\varphi \circ p$ et $p \circ \varphi$.