

Correction du Test n° 18

Sujet A

1.

2. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$.

(a) On pose $t = \frac{1}{x}$ $\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = \arctan\left(\frac{t}{1+t}\right)$

$$\frac{t}{1+t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} t(1-t+t^2+o(t^2)) = t - t^2 + t^3 + o(t^3)$$

En utilisant $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ avec $u = t - t^2 + t^3 + o(t^3)$, $u^3 = t^3 + o(t^3)$

$$\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} t - t^2 + t^3 - \frac{t^3}{3} + o(t^3) = t - t^2 + \frac{2t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

(b) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x - 1$, et elle est située au-dessus cette l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\frac{2}{3x} \geq 0$ pour tout $x > 0$.

3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+z, 5x-2y+z) \end{cases}$

(a) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\
 &= (x + \lambda x' + z + \lambda z', 5((x + \lambda x') - 2(y + \lambda y')) + z + \lambda z') \\
 &= (x + z, 5x - 2y + z) + \lambda(x + z', 5x' - 2y' + z') \\
 &= f(u) + \lambda f(v).
 \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.(b) $u \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = (x + z, 5x - 2y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow x = -z$ et

$$4x - 2y = 0 \Leftrightarrow z = -x \text{ et } y = 2x.$$

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1, 2, -1)$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.D'après le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$ donc $\text{rg } f = 2$ et $\text{Im } f$ étant un sev de \mathbb{R}^2 , $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ (c) f n'est pas injective car $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (ou car $\dim \mathbb{R}^3 > \dim \mathbb{R}^2$) et f n'est alors pas bijective. f est surjective car $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

Correction du Test n° 18

Sujet B

1.

2. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

(a) On pose $t = \frac{1}{x}$ $\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \arctan\left(\frac{t}{1-t}\right)$

$$\frac{t}{1-t} \underset{t \rightarrow 0_+}{=} t(1+t+t^2+o(t^2)) = t+t^2+t^3+o(t^3)$$

En utilisant $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ avec $u = t+t^2+t^3+o(t^3)$, $u^3 = t^3+o(t^3)$

$$\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right) \underset{t \rightarrow +0}{=} t+t^2+t^3 - \frac{t^3}{3} + o(t^3) = t+t^2 + \frac{2t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

(b) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x+1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 1$, et elle est située au-dessus cette l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\frac{2}{3x} \geq 0$ pour tout $x > 0$.

3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 2x + y, y) \end{cases}$

(a) Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\
 &= ((x + \lambda x'), 2(x + \lambda x') + (y + \lambda y'), (y + \lambda y')) \\
 &= (x, 2x + y, y) + \lambda(x', 2x' + y', y') \\
 &= f(u) + \lambda f(v).
 \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.(b) $u \in \text{Ker}(f) \iff f(u) = (x, 2x + y, y) = (0, 0, 0) \iff x = y = 0$ donc

$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$v = f(u) \iff v = (x, 2x + y, y) = x \underbrace{(1, 2, 0)}_{=u_1} + y \underbrace{(0, 1, 1)}_{=u_2}.$$

Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et u_1, u_2 ne sont pas colinéaires, donc (u_1, u_2) est une base de $\text{Im } f$ et $\text{rg } f = 2$.(c) f est injective car $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ f n'est pas surjective car $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$ (ou car $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$), et n'est donc pas non plus bijective.