NOM : .... **Lundi 27 avril 2026**

Test n° 18

Sujet A

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Compléter :

   (a) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect} \cdots\cdots$

   (b) f est injective ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est $\cdots\cdots$

2. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$. On note C sa courbe représentative dans un repère du plan.

   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

   (b) En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ en $+\infty$ puis donner la position relative de C et Δ au voisinage de $+\infty$.

3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, 5x-2y+z) \end{array} \right.$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Donner une base et la dimension de son noyau et de son image.

(c) Dire si f est injective, surjective, bijective.

NOM : .... **Lundi 27 avril 2026**

Test n$^{\text{o}}$ 18

Sujet B

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Compléter :

   (a) f est surjective ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est $\cdots\cdots$

   (b) f est un isomorphisme de E sur F ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est $\cdots\cdots$

2. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$. On note C sa courbe représentative dans un repère du plan.

   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ en $+\infty$.

   (b) En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ en $+\infty$ puis donner la position relative de C et Δ au voisinage de $+\infty$.

3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, 2x+y, y) \end{array} \right.$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Donner une base et la dimension de son noyau et de son image.

(c) Dire si f est injective, surjective, bijective.