Correction du Test n° 29

Sujet A

1.

2. Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

   Notons T l'évènement « On lance un dé truqué ».
   $P(T) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$, $P_T(6) = \dfrac{1}{2}$ et $P_T(1) = P_T(2) = P_T(3) = P_T(4) = P_T(5) = \dfrac{1}{10}$

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

   D'après la formule des probabilités totales,
   $P(6) = P(\overline{T})P_{\overline{T}}(6) + P(T)P_T(6) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{30}$

   (b) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ? D'après la formule de Bayes, $P_6(T) = \dfrac{P(T)P_T(6)}{P(6)} = \dfrac{\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{7}{30}} = \dfrac{3}{7}$

   (c) On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?
   $$P_2(\overline{T}) = \frac{P(\overline{T})P_{\overline{T}}(2)}{P(2)} = \frac{\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{10}} = \frac{20}{23}$$

3. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par $\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X-1)P'$

   (a) Si $P \in E$, on sait que deg $(P) \leqslant 2$, donc deg $(P') \leqslant 1$, et deg $((X-1)P') \leqslant 2$.

   Quand on soustrait deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2, le résultat l'est aussi, ce qui prouve que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   On démontre que φ est linéaire (à faire) et $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

   (b) Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$, alors $\varphi(P) = 2aX^2 + 2bX + 2c - (X-1)(2aX+b) = 2aX^2 + 2bX + 2c - 2aX2 + 2aX - bX + b = (b+2a)X + 2c + b$.

   $\varphi(p) = 0 \Leftrightarrow b + 2a = 2c + b = 0$, soit $c = a = -\dfrac{b}{2}$

   On en déduit que

   $\boxed{\text{Ker}(\ \varphi) = \text{Vect }(X^2 - 2X + 1) \text{ et Ker }(\varphi) \text{ est une droite vectorielle.}}$

   $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$ puisque son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

   (c) On peut calculer les images des polynômes de la base canoniques :
   $\varphi(1) = 2, \varphi(X) = 2X - (X-1) = X + 1$ et $\varphi(X^2) = 2X^2 - 2X(X-1) = 2X$.

   On peut alors dire que Im $(\varphi) =$ Vect $(2, X+1, 2X) =$ Vect $(2, 2X) = \boxed{\text{Vect }(1, X).}$

   (d) $(1, X, X^2 - 2X + 1)$ est une famille libre car à degrés échelonnées de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et

   $\boxed{\text{Ker }(\varphi) \text{ et Im }(\varphi) \text{ sont bien supplémentaires.}}$

   (e) Soit p la projection vectorielle sur Ker (φ) de parallèlement à Im (φ).

   $\boxed{\varphi \circ p = 0}$ car p est la projection sur Ker (φ), $p(P) \in$Ker $(\varphi), \forall P \in E$

$\boxed{p \circ \varphi = 0}$ car la projection p est parallèlement à Im (φ) donc Ker $p =$ Im φ

Correction du Test n° 21

Sujet B

1.

2. On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges.

   Notons A « On tire dans la première urne »et B : « On tire deux boules rouges »

   (a) On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ?

   $$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}}}{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{6}{2} + \binom{3}{2}} = \frac{15}{15+3} =$$

   $\frac{5}{6}$, d'après la formule de Bayes,

   (b) Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

   $$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

   La probabilité est légèrement plus faible dans ce cas.

3. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par $\forall P \in E, \varphi(P) = P - (X+1)P'$

   (a) Si $P \in E$, on sait que deg $(P) \leqslant 2$, donc deg $(P') \leqslant 1$, et deg $((X+1)P') \leqslant 2$.

   Quand on soustrait deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2, le résultat l'est aussi, ce qui prouve que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   On démontre que φ est linéaire (à faire) et $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

   (b) Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$, alors $\varphi(P) = aX^2 + bX + c - (X+1)(2aX+b) = aX^2 + bX + c - 2aX^2 - 2aX - bX - b = aX^2 - 2aX + c - b$.

   $\varphi(p) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $c = b$

   On en déduit que $\boxed{\text{Ker}(\ \varphi) = \text{Vect } X+1) \text{ et Ker } (\varphi) \text{ est une droite vectorielle.}}$

   $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$ puisque son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

(c) On peut calculer les images des polynômes de la base canoniques :
$\varphi(1) = 1, \varphi(X) = -1$ et $\varphi(X^2) = X^2 - 2X(X+1) = -X^2 - 2X$.
On peut alors dire que $\boxed{\text{Im } (\varphi) = \text{Vect } (1, X^2 + 2X)}$

(d) $(1, X+1, X^2+2X)$ est une famille libre car à degrés échelonnées de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et
$\boxed{\text{Ker } (\varphi) \text{ et Im } (\varphi) \text{ sont bien supplémentaires.}}$

(e) Soit p la projection vectorielle sur Ker (φ) de parallèlement à Im (φ).
$\boxed{\varphi \circ p = 0}$ car p est la projection sur Ker (φ), $p(P) \in$Ker $(\varphi), \forall P \in E$
$\boxed{p \circ \varphi = 0}$ car la projection p est parallèlement à Im (φ) donc Ker $p =$ Im φ