

Devoir maison n° 7

A rendre le jeudi 23 novembre 2023

Exercice 1 On considère l'équation différentielle $(E) : (1 - x^2)y'' - 3xy' + 15y = 0$.

Déterminer un polynôme P solution de (E) et vérifiant $P'(0) = -4$.

Exercice 2 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire

$$(S) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}, \text{ de paramètre } m \text{ et d'inconnues } x, y \text{ et } z.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le système (S) est incompatible.
2. Dans le cas où (S) est compatible, déterminer l'ensemble de ses solutions.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers un réel ℓ .
3. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{n-1}{n} \times u_{n-2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, sous forme de produits, les termes u_{2n} et u_{2n+1} .
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression des termes u_{2n} et u_{2n+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de π , puis montrer que :

$$u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

6. En déduire la valeur de la limite ℓ de (u_n) .