Correction du Test n° 20

Sujet A

1. On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.

   (a) Un joueur pioche au hasard un jeton dans l'urne. On note X le numéro tiré.

   $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

   (b) Le joueur pioche à présent deux jetons successivement sans remise dans l'urne.

   $P(U \leqslant i) = \dfrac{i}{n}$ et $P(D \leqslant i \,|\, U \leqslant i) = \dfrac{i-1}{n-1}$

   $P(Y \leqslant i) = P(U \leqslant i \cap D \leqslant i) = P(U \leqslant i)P(D \leqslant i \,|\, U \leqslant i) = \dfrac{i^2 - i}{n^2 - n}$

2. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \ln t \,\mathrm{d}t$.

   $t \mapsto \ln t$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^2$ aussi et si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Si on note F une primitive de cette fonction, on a $f(x) = F(x^2) - F(x)$ donc $f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x\ln(x^2) - \ln x = (4x-1)\ln x$

Correction du Test n° 20

Sujet B

1. On dispose d'une urne contenant $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.

   (a) Un joueur pioche au hasard un jeton dans l'urne. On note X le numéro tiré.

   $X(\Omega) = \llbracket 1, 2n \rrbracket$ et X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 2n \rrbracket$.

   (b) Le joueur pioche à présent deux jetons successivement avec remise dans l'urne.

   $P(U \leqslant i) = \dfrac{i}{2n}$ et $P(D \leqslant i) = \dfrac{i}{2n}$

   Les variables aléatoires U et D sont indépendantes car le tirage se fait avec remise donc $P(Y \leqslant i) = P(U \leqslant i \cap D \leqslant i) = P(U \leqslant i)P(D \leqslant i) = \dfrac{i^2}{4n^2}$

2. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

   $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ aussi donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$. Si on note F une primitive de cette fonction, on a $f(x) = F(x^2) - F(x)$ donc

   $f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x}$