Correction du devoir maison n° 20

Exercice 1 On considère n personnes qui se transmettent une information I. La première personne reçoit cette information, la transmet à la deuxième personne, ainsi de suite jusqu'à la n-*ième* personne qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement I_n : "la n-*ième* personne transmet l'information I" et on pose $p_n = \mathrm{P}(I_n)$. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathrm{P}(I_{n+1}) \\ &= \mathrm{P}(I_n)\mathrm{P}_{I_n}(I_{n+1}) + \mathrm{P}(\overline{I_n})\mathrm{P}(I\overline{I_n}_{n+1}) \\ &= p_n \times p + (1 - p_n)(1 - p) \\ &= (2p - 1)p_n + 1 - p. \end{aligned}$$

– Si $p = \frac{1}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 1 - p = \frac{1}{2}$ et (p_n) est stationnaire à partir du rang 1.

– Si $p \neq \frac{1}{2}$: On résout

$$x = (2p - 1)x + 1 - p \iff x = \frac{1 - p}{2 - 2p} = \frac{1 - p}{2(1 - p)} = \frac{1}{2}.$$

On pose $v_n = p_n - \frac{1}{2}$. On montre que (v_n) est géométrique de raison $(2p - 1)$ et de premier terme

$$v_0 = p_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}}$.

De plus, $0 < 2p < 2$ donc $-1 < 2p - 1 < 1$ et $\boxed{p_n \longrightarrow \frac{1}{2}}$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On tire deux boules successivement dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Le tirage des deux boules successives se fait sans remise.

   (a) $(X, Y)(\Omega) = [\![1, n]\!]^2$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

   $\boxed{\bullet \text{ Si } i = j \text{ alors } P(X = i \cap Y = i) = 0}$

   $\boxed{\bullet \text{ Si } i \neq j \text{ alors } P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = \frac{1}{n}\frac{1}{n - 1}}$

(b) $\boxed{X \sim \mathscr{U}(n)}$

D'après la formule des probabilités totales, $\{(X = i), i \in [\![1, n]\!]\}$ étant un système complet d'événements

$P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = i \cap Y = j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ donc $\boxed{Y \sim \mathscr{U}(n)}$

(c) Les variables aléatoires $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$ car $P(X = i \cap Y = i) = 0 \neq P(X = i)P(Y = i) = \dfrac{1}{n^2}$

2. Le tirage des deux boules successives se fait avec remise.

(a) $\boxed{X \sim \mathscr{U}(n)}$. $\boxed{Y \sim \mathscr{U}(n)}$

(b) Les variables aléatoires $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$ car le tirage se fait avec remise.

(c) $Z = X + Y$. $Z(\Omega) = [\![2, 2n]\!]$

$P(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i)$ car X et Y sont indépendantes et car $P(X = 0) = P(y = 0) = 0$

• Si $k \leqslant n + 1$ alors $i \in [\![1, n]\!]$ et $k - i \in [\![1, n]\!], \forall i \in\in [\![1, k-1]\!]$. On a alors $P(X = i) = P(Y = k - i) = \dfrac{1}{n}$ et $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$

• Si $k > n + 1$ alors $P(X = i)P(Y = k - i) \neq 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k - i \leqslant n$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n$ et $k - n \leqslant i \leqslant k - 1 \Leftrightarrow k - n \leqslant i \leqslant n$

$P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n - (k-n) + 1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}$

$$\boxed{\text{La loi de } Z \text{ est donc donnée par } Z(\Omega) = [\![2, 2n]\!] \text{ et } P(Z = k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & 2 \leqslant k \leqslant n + 1 \\[2ex] \dfrac{2n - k + 1}{n^2} & n + 2 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}}$$