

Correction du devoir maison n° 21

Exercice 1

1. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$p(X + \lambda X') = A(X + \lambda X') = AX + \lambda AX' = p(X) + \lambda p(X').$$

De plus, $p(X) = AX$ est une matrice colonne de trois lignes. Donc on a bien

$$\boxed{p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

2. Par le calcul, on trouve $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A}$.

Donc, $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $p \circ p(X) = p(p(X)) = p(AX) = AAX = A^2X = AX = p(X)$.

Donc $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $p \circ p = p$ et, par le théorème de caractérisation des projecteurs,

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) \text{ et } p \text{ est le projecteur sur } F = \text{Im}(p) \text{ parallèlement à } G = \text{Ker}(p)}.$$

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a

$$p(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2p(e_1), \quad p(e_3) = p(e_1).$$

Donc $F = \text{Im}(p) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3)) = \text{Vect}(p(e_1))$, avec $p(e_1)$ non nul.

$$\text{Donc } \boxed{F \text{ admet pour base } \mathcal{B}_1 = (p(e_1)) \text{ et } \dim(F) = \text{rg}(p) = 1}.$$

Par le théorème du rang $\dim(G) = \dim(\text{Ker}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(p) = 3 - 1 = 2$.

De plus, $p(e_2) = 2p(e_1) \xrightarrow{\text{linéarité}} p(e_2 - 2e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et

$p(e_3) = p(e_1) \xrightarrow{\text{linéarité}} p(e_3 - e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$e_2 - 2e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 - e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

Donc $\mathcal{B}_2 = (e_2 - 2e_1, e_3 - e_1)$ est une famille de vecteurs de $G = \text{Ker}(p)$, libre de rang $2 = \dim(G)$.

$$\text{Donc } \boxed{G \text{ admet pour base } \mathcal{B}_2 = (e_2 - 2e_1, e_3 - e_1) \text{ et } \dim(G) = 2}.$$

4. D'après le cours, la symétrie par rapport à F parallèlement à G est $s = 2p - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$, vérifiant

$$s(X) = 2p(X) - X = 2AX - X = (2A - I_3)X.$$

Donc $s : X \mapsto BX$, où $B = 2A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, par opérations sur les limites.

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $-\infty$.

2. Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, par croissance comparée et opérations sur les limites.

De même, $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^3} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit que la courbe \mathcal{C}_f n'admet pas de droite asymptote en $+\infty$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, et $f'(x) = 0 \iff x = 1$.

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + o(x^3)$.

Par produit de développements limités, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$.

On en déduit que la tangente à \mathcal{C}_f en 0 est la droite T_0 d'équation $y = 1 + x$.

De plus, $f(x) - (1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \leq 0$ et \mathcal{C}_f est en-dessous de T_0 au voisinage de 0.

5. On pose $x = 1 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$, et on calcule $f(1+h) = \frac{e^{1+h}}{1+(1+h)^2} = \frac{e}{2} \times \frac{e^h}{1+h+\frac{h^2}{2}}$.

$h + \frac{h^2}{2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ donc, par composition,

$$\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \left(h + \frac{h^2}{2}\right) + \left(h + \frac{h^2}{2}\right)^2 - \left(h + \frac{h^2}{2}\right)^3 + o(h^3) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^3),$$

$$f(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{2} \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) \left(1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{2} \left(1 + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right).$$

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{e}{2} + \frac{e}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

On en déduit que la tangente à \mathcal{C}_f en 1 est la droite horizontale T_1 d'équation $y = \frac{e}{2}$.

De plus, $f(x) - \frac{e}{2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{e}{12}(x-1)^3$. Donc, comme f est strictement croissante,

\mathcal{C}_f est en-dessous de T_1 si $x \leq 1$, et au-dessus si $x \geq 1$ (point d'inflexion).

6.

7. Par primitivation du DL de f en 0 on obtient

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)}.$$