

Correction du Test n° 21

Sujet A

1.

2. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ car $1+x^2 \neq 0$ sur cet intervalle.

D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Donc
$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n}$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y, z)) = (x + 2y + 3z, y + 2z)$

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$\text{Ker } A = \text{Vect}(1, -2, 1)$ puis $\text{rg } A = 2$ d'après le théorème du rang. Or $\text{Im } A$ est un sev de \mathbb{R}^2 , donc $\text{Im } A = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

On peut aussi dire que $\text{Im } A = \text{Vect}((1, 0), (2, 1)) = \mathbb{R}^2$ vu que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Correction du Test n° 21

Sujet B

1.

2. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ est continue sur $[0, 1]$ car $1+x > 0$ sur cet intervalle.

D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +}{\sim} \sqrt{n}(2\sqrt{2} - 2)$

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y, z)) = (x + y + 4z, y + 2z)$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -2z \end{cases}$

$\text{Ker } A = \text{Vect}(-2, -2, 1)$ puis $\text{rg } A = 2$ d'après le théorème du rang. Or $\text{Im } A$ est un sev de \mathbb{R}^2 , donc $\text{Im } A = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

On peut aussi dire que $\text{Im } A = \text{Vect}((1, 0), (1, 1)) = \mathbb{R}^2$ vu que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.