Devoir maison n$^{\text{o}}$ 22

A rendre le jeudi 28 mai 2026

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique, base qui sera notée $\mathcal{B}$.

Partie A

1. Calculer A^2 et montrer que $A^3 = 2A$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Ker}(f - \sqrt{2}\ \text{id})$.
3. Soient $u = (1, 0, -1), v = (1, \sqrt{2}, 1)$ et $w = (1, -\sqrt{2}, 1)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
6. Vérifier le résultat de la question 4. à l'aide d'un produit de matrices.

Partie B

On considère l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et que la famille (I_3, A, A^2) en constitue une base.
2. Montrer que, $\forall M \in F, AM \in F$.
3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$
   (a) Montrer que $g \in \mathscr{L}(F)$.
   (b) Écrire la matrice de g dans la base (I_3, A, A^2).
   (c) Montrer que $g \circ g \circ g = 2g$.
   (d) Déterminer une base de $\text{Ker}(g)$.
   (e) Déterminer le rang de g.
   (f) Résoudre dans F l'équation $g(M) = A + A^2$.