

Devoir maison n° 23

A rendre le lundi 4 juin 2026

Exercice 1 On étudie la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$, où $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k)$.

1. Déterminer, à l'aide d'une I.P.P., un équivalent simple de $\int_1^n \ln^2(t)dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
2. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. Conclure sur la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$

Exercice 2 Soit $\alpha > 1/2$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

1. Montrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Est-elle ACV ?
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ converge. Est-elle ACV ?