Samedi 23 mai 2026

Devoir surveillé n° 6

Ce devoir est constitué de trois exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **7,5 points** : **1.** 0.5 **2.** 1 **3.** 2.5 **4.** 0.5 **5.** 2 **6.** 1

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$

1. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]0,1[)$.
2. Montrer que $\forall t \in]0,1[, \quad \dfrac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t-1$.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0^+ et en 1^- puis que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 1, à déterminer.
6. En déduire la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en 1. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 1.

Exercice 2 **6 points** : **1.** 1 **2.(a)** 1 **2. (b)** 0.5 **2. (c)** 0.5 **3.** 1.5 **4.** 0.5 **5.** 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P + (1-X)P'$.

Pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, on note T_k le polynôme $(X-1)^k$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Justifier que $\mathcal{B} = \left(T_k, k \in [\![0,n]\!]\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Exprimer $\varphi(T_k)$ en fonction de k et T_k.
   (c) En déduire que $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0,2,\ldots,n\}\right)$.
3. Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}\ \varphi$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}\ \varphi$ et $\mathrm{Im}\ \varphi$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On note f la projection sur Im φ parallèlement à Ker φ.

   Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer l'expression de $f(P)$ en fonction de P.

   On pourra penser à utiliser la formule de Taylor.

Exercice 3 **6.5 points** :**1.** 1 **2. (a)** 0.5 **2. (b)** 0.5 **2. (c)** 1.5 **2. (d)** 0.5 **2. (e)** 1 **2. (f)** 0.5 **2. (g)** 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
- On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages dans l'urne U_n nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.

1. Déterminer $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$ ainsi que les lois de X_1 et X_2.

2. On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2. On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

   (a) Déterminer la loi de I_n.

   (b) Justifier que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

   (c) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

   (d) Justifier que $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n]\!]$.

   (e) Démontrer que pour tout $j \geqslant 2$, $P(X_n = j) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$.

   (f) Démontrer que, pour tout $j \geqslant 2$,

   $$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1).$$

   On pourra exprimer $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$ en utilisant le résultat de la question précédente.

   (g) Démontrer que $P(X_n = n-1) = \dfrac{1}{2(n-2)!}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2.