Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1

1. (a) La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est défini ssi $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ est défini et strictement positif, ce qui équivaut à $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, car la valeur absolue est positive.

   $\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}}$.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $-x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ et
$$f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -f(x).$$

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire}}$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\}$, $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\}$ et
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\},\ f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)}$.

2. (a) $\forall x \in [0,1[$, $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$ (signe du trinôme $(x-1)(x+1)$) et $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

   Sur $[0,1[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et est strictement positive. Donc g est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$:
$$g'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{-1\times(1+x)-1\times(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-1}{(1-x)(1+x)} < 0, \text{ car } (1-x)(1+x) > 0.$$

   Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement décroissante sur } [0,1[}$.

   Si $x \underset{x<1}{\rightarrow} 1$ alors $\dfrac{1-x}{1+x} \rightarrow 0^+$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty}$, par composition de limites.

   De plus, $g(0) = \dfrac{1}{2}\ln(1) = 0$. D'où :

x	0		1
$g'(x)$		$-$	$\|\|$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

(b) $g(0)=0$ et $g'(0)=-1$, donc la courbe de g admet une tangente T en son point d'abscisse 0, d'équation $\boxed{T : y=-x}$.

Considérons la fonction d définie sur $[0,1[$ par $d(x)=g(x)-(-x)$. Sur $[0,1[$, d est dérivable comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in [0,1[$:

$d'(x)=g'(x)+1=\dfrac{-x^2}{(1-x)(1+x)} \leq 0$. La fonction d est donc décroissante sur $[0,1[$.

Comme $d(0)=0$, $d \leq 0$ sur $[0,1[$, et $\boxed{\text{le graphe de } g \text{ est en-dessous de } T \text{ sur } [0,1[}$.

3. $\forall x \in]1\ ,\ +\infty[$, $\dfrac{x-1}{x+1}>0$ (signe du trinôme $(x-1)(x+1)$) et $h(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Sur $]1\ ,\ +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{1+x}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et est strictement positive. Donc h est dérivable sur $]1\ ,\ +\infty[$ et $\forall x \in]1\ ,\ +\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1+x-1\times(x-1)}{(1+x)^2}}{\frac{x-1}{1+x}}=\frac{1}{(x-1)(1+x)}>0, \text{ car } (x-1)(1+x)>0.$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est strictement croissante sur }]1\ ,\ +\infty[}$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{1+x}=0_+$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{1+x}=1$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0}$. D'où

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0

Exercice 2 On considère les fonctions g et h définies par

$$g(x)=\arcsin(2x-1) \text{ et } h(x)=\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right).$$

1. Pour le domaine de définition de f, on résout : $-1 \leq 2x-1 \leq 1$ (avec des inégalités strictes pour f') $\iff 0 \leq x \leq 1 \iff D_f=[0;1]$ et $D_{f'}=]0;1[$

   De même, pour la fonction g, on résout :
   $\dfrac{1-x}{x} \geq 0 \iff x \in]0;1]$ et $D_{g'}=D_{f'}=]0;1[$

2. On calcule les dérivées, pour $x \in]0;1[$:
$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$
$$g'(x) = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)} = x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) = x\frac{\dfrac{-1}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}} = \frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

3. On en déduit la relation :
$$\forall x \in]0;1[\quad f'(x)+2g'(x)=0 \implies \forall x \in]0;1[\quad f(x)+2g(x)=C$$
En prenant la valeur $x=\frac{1}{2}$, on constate que $C=\frac{\pi}{2}$. D'où :
$$\boxed{\forall x \in]0;1[\quad \arcsin(2x-1)+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 3 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ et $u_n = \frac{6}{n} S_n$

1. (a) $u_1 = 6, u_2 = 15$ et $u_3 = 28$.

   (b) $u_n = an^2+bn+c, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{cases} u_1 = a+b+c & = & 6 \\ u_2 = 4a+2b+c & = & 15 \\ u_3 = 9a+3b+c & = & 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+a+b & = & 6 \\ 3a+b & = & 9 \\ 8a+2b & = & 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+a+b & = & 6 \\ 3a+b & = & 9 \\ 2a & = & 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} c & = & 1 \\ b & = & 3 \\ a & = & 2 \end{cases}$$
   donc $u_n = 2n^2+3n+1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Démontrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

   (b) $\dfrac{6}{n} S_n = (n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1 = u_n$ donc le résultat de la question 1. (b) est bien vérifié.