

Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$

1. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est continue sur l'intervalle $I =]0, 1[$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas.

Donc g admet des primitives sur l'intervalle I . Notons G l'une d'entre elles. La fonction G est de classe \mathcal{C}^1 sur I car dérivable sur I , de dérivée g continue sur I .

De plus, $\forall x \in I, x^2 \in I$ donc $f(x) = G(x^2) - G(x)$.

Ainsi, f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , comme somme de composées de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

2. Soit $t \in I$ fixé. La fonction \ln est dérivable sur $[t, 1]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]t, 1[$ tel que : $\ln(1) - \ln(t) = \ln'(c)(1 - t) = \frac{1 - t}{c}$.

De plus, $t < c < 1$ donc $1 < \frac{1}{c} < \frac{1}{t}$, et donc $1 - t < \frac{1 - t}{c} < \frac{1 - t}{t}$ (car $1 - t > 0$).

En multipliant par $-1 < 0$ on obtient, pour tout $t \in I, \quad \frac{t - 1}{t} \leq \ln(t) \leq t - 1$.

Remarque on peut aussi utiliser la concavité de la fonction \ln et sa tangente en 1 pour l'inégalité de droite. Et pour celle de gauche, étudier les variations puis en déduire le signe de la fonction $t \mapsto \frac{t - 1}{t} - \ln(t)$

3. Soit $x \in I$ fixé. Comme $0 < x^2 < x < 1$ on a, d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall t \in [x^2, x], \quad \frac{1}{t - 1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{t}{t - 1} = 1 + \frac{1}{t - 1}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a : $\int_{x^2}^x \frac{1}{t - 1} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x 1 + \frac{1}{t - 1} dt$.

En multipliant par $-1 < 0$, on obtient :

$$\boxed{\int_x^{x^2} \frac{1}{t - 1} dt \geq f(x) \geq \int_x^{x^2} 1 + \frac{1}{t - 1} dt \quad (1)}.$$

$\forall x \in I, \int_x^{x^2} \frac{1}{t - 1} dt = \ln|x^2 - 1| - \ln|x - 1| = \ln\left(\frac{|x - 1||x + 1|}{|x - 1|}\right) \underset{x+1>0}{=} \ln(x + 1)$, et

$$\int_x^{x^2} 1 + \frac{1}{t - 1} dt = x^2 - x + \ln(1 + x).$$

Par (1), par opérations sur les limites, et par le théorème d'encadrement des limites, on obtient :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\longrightarrow} \ln(2) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Si on note encore f ce prolongement, on a $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2)$. Montrons que ce prolongement est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

Par opérations sur les limites, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

$$\text{Si } h \text{ est tel que } 1+h \in]0, 1[, \quad f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h}{h} = 1.$$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et en 1, avec $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 1$, et sa dérivée est continue en 0 et en 1.

Finalement, le prolongement de f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

4. Si $x \in]0, 1[$, alors $x-1 < 0$, $\ln(x) < 0$, et $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$. D'où le tableau :

x	0	1
$f(x)$	0	$\ln(2)$

5. Soit h tel que $1+h \in]0, 1[$ fixé. On a :

$$f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{h}{h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - (\frac{h}{2} + o(h))}.$$

Or $\frac{1}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + o(u)$, et $\frac{h}{2} + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Donc, par composition,

$f'(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{h}{2} + o(h)$. Comme $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ et $f(1) = \ln(2)$, on obtient, en primitivant :

$$f(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \ln(2) + h + \frac{h^2}{4} + o(h^2).$$

$$\text{Donc } f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln(2) + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$$

6. Donc \mathcal{C}_f admet une tangente \mathcal{T} au point $(1, f(1))$, d'équation $y = x - 1 + \ln(2)$.

De plus, $f(x) - (x - 1 + \ln(2)) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2) \geq 0$ au voisinage de 1.

Donc \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{T} au voisinage de 1.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\varphi(P) = P + (1 - X)P'.$$

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note T_k le polynôme $(X - 1)^k$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(1 - X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$ puis

$$\varphi(P) = P + (1 - X)P' \in \mathbb{R}_n[X].$$

Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda P + \mu Q + \lambda(1 - X)P' + \mu(1 - X)Q' \\ &= \lambda(P + (1 - X)P') + \mu(Q + (1 - X)Q') = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q). \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) $\mathcal{B} = \{T_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs, $\boxed{\text{c'est donc une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

- (b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\varphi(T_k) = T_k + (1 - X)T_k' = (X - 1)^k + k(1 - X)(X - 1)^{k-1} = (1 - k)(X - 1)^k = \boxed{(1 - k)T_k.}$$

- (c) $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(\varphi(T_k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket)$ car \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(T_k)$ est colinéaire à T_k d'après la question précédente, avec $\varphi(T_1) = 0$ d'où $\boxed{\text{Im } \varphi = \text{Vect}(T_k, k \in \{0, 2, \dots, n\}).}$

3. La famille $(T_k, k \in \{0, 2, \dots, n\})$ est libre comme sous famille d'une famille libre, c'est alors une base de $\text{Im } \varphi$ et $\text{rg } \varphi = n$. D'après le théorème du rang, $\boxed{\dim \text{Ker } \varphi = 1.}$ Or $T_1 \in \text{Ker } \varphi$ et T_1 est non nul, c'est donc une base de $\text{Ker } \varphi$.

4. \mathcal{B} étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, (T_1) une base de $\text{Ker } \varphi$ et $(T_k, k \in \{0, 2, \dots, n\})$ une base de $\text{Im } \varphi$, $\boxed{\text{Ker } \varphi \text{ et } \text{Im } \varphi \text{ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de } \mathbb{R}_n[X].}$

5. On note f la projection sur $\text{Im } \varphi$ parallèlement à $\text{Ker } \varphi$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k$ d'après la formule de Taylor en 1.

$$P = \underbrace{P(1) + \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k}_{\in \text{Im } \varphi} + \underbrace{P'(1)(X - 1)}_{\in \text{Ker } \varphi}$$

est l'unique décomposition de P en somme d'un vecteur de $\text{Im } \varphi$ et d'un vecteur de $\text{Ker } \varphi$.

Par définition de la projection,

$$\boxed{f(P) = P(1) + \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k, \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X].}$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n . On tire une boule au hasard dans U_n . On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k - 1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
- On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.

1. L'urne U_1 contient une seule boule numérotée 1. Le premier tirage sera donc forcément celui de la boule numérotée 1 donc $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(X_1 = 1) = 1$. L'urne U_2 contient deux boules numérotées 1 et 2. Si la boule numérotée 1 n'est pas tirée la première fois, c'est qu'on a tiré la boule numérotée 2. Par conséquent, dans ce cas, le second tirage sera forcément celui de la boule 1. On obtient

$$X_2(\Omega) = \{1, 2\} \text{ et } P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \text{ puis } P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

2. (a) L'urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n . Le premier tirage sera forcément l'une de celle-ci donc $I_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a une chance sur n de tirer la boule numérotée k donc $P(I_n = k) = \frac{1}{n}$, autrement dit, la variable aléatoire I_n suit la loi uniforme $U(n)$.
- (b) Le nombre de tirages avant d'obtenir la boule numérotée 1 est au moins 1 et est inférieur à n car, à chaque tirage, on retire au moins une boule. Ainsi, $X_n(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (c) La boule numérotée 1 peut-être tirée lors du premier tirage mais on peut aussi tirer successivement les boules numérotées n , puis $n - 1$, puis $n - 2, \dots$, puis 2, puis 1 auquel cas n tirages sont nécessaires pour obtenir la boule numérotée 1. De même, pour tout entier j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, en tirant successivement les boules numérotées $j, j - 1, j - 2, \dots, 2$ puis 1, la variable aléatoire X_n peut prendre la valeur j . Par conséquent, $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Au premier tirage, on a une chance sur n de tirer la boule numérotée 1 donc

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

La seule manière de tirer la boule numérotée 1 au bout de n tirages et pas avant est de tirer successivement les boules numérotées n , puis $n - 1$, puis $n - 2, \dots$, puis 2, puis 1. On a 1 chance sur n de tirer la boule numérotée n au premier tirage. Puis au deuxième, il reste les boules numérotées de 1 à $n - 1$ donc on a 1 chance sur $n - 1$ de tirer la boule numérotée $n - 1$... Grâce à la formule des probabilités composées,

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{n!}.$$

- (d) Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Si on a tiré la boule numérotée k au premier tirage, on retire les boules numérotées $k, k + 1, \dots, n$. Il reste donc dans l'urne les boules

numérotées $1, \dots, k-1$. Au moment de tirer pour la seconde fois, on se retrouve face à l'urne U_{k-1} et il reste exactement $j-1$ tirages à effectuer pour obtenir la boule numérotée 1. La probabilité de cet événement est celle de tirer la boule numérotée 1 au bout de $j-1$ étapes dans une urne contenant $k-1$ boules numérotées de 1 à $k-1$ est $P(X_{k-1} = j-1)$ par définition. Par conséquent,

$$\boxed{P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)}.$$

- (e) Soit $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(\{I_n = k\})_{k=1 \dots n}$,

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{k=1}^n P(X_n = j | I_n = k) P(I_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_n = j | I_n = k) \quad \text{grâce à la loi de } I_n \text{ déterminée à la question ??} \\ &= \frac{1}{n} \left(\underbrace{P(X_n = j | I_n = 1)}_{=0 \text{ car } j \geq 2} + \sum_{k=2}^n P(X_n = j | I_n = k) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n P(X_{k-1} = j-1) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) \quad \text{après changement d'indice.} \end{aligned}$$

- (f) Soit $j \geq 2$. Grâce à la question précédente,

$$nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1) = P(X_{n-1} = j-1)$$

$$\text{donc } \boxed{P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)}.$$
 On remarque que

cette relation est encore valable pour $j=1$ puisque $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$,

$P(X_{n-1} = 1) = \frac{1}{n-1}$ et $P(X_{n-1} = 0) = 0$ puisque l'événement $\{X_{n-1} = 0\}$ est impossible.

- (g) Montrons par récurrence que $P(X_n = n-1) = \frac{1/2}{(n-2)!}$ pour tout entier $n \geq 2$.

L'égalité est vérifiée au rang 2 d'après la question 1.

Supposons que $P(X_{n-1} = n-2) = \frac{1/2}{(n-3)!}$ à un rang n .

$P(X_n = n-1) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = n-1) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = n-2)$ d'après la question précédente pour $j = n-1$.

$P(X_n = n-1) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n} \frac{1/2}{(n-3)!}$ d'après la question 2.(a) et l'hypothèse de récurrence.

$P(X_n = n-1) = \frac{2(n-1) + (n-1)(n-2)}{2n!} = \frac{(n-1)n}{2n!} = \frac{1}{2(n-2)!}$ ce qui montre l'hérédité.