

Correction du devoir maison n° 22

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 ayant pour matrice A dans la base canonique, base qui sera notée \mathcal{B} .

Partie A

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 2A$.

2. $f(x, y, z) = (y, x + z, y)$. On en déduit que $u(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow y = z + x = 0 \Leftrightarrow y = 0$
et $z = -x$.

$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 0, -1))$ et le vecteur $(1, 0, -1)$ constitue une base de ce noyau
puisque'il est non nul.

$$u(x, y, z) \in \text{Ker}(f - \sqrt{2}\text{id}) \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x\sqrt{2} \\ x + z &= y\sqrt{2} \\ y &= z\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = z = \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$\text{Ker}(f - \sqrt{2}\text{id}) = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$ et

le vecteur $(1, \sqrt{2}, 1)$ constitue une base de ce noyau.

3. Soient $u = (1, 0, -1), v = (1, \sqrt{2}, 1)$ et $w = (1, -\sqrt{2}, 1)$. D'après le théorème de Gauss Jordan, on montre que la matrice de passage P de la base canonique à la base \mathcal{B} est inversible, ce qui suffit pour cette question, mais autant calculer P^{-1} en même temps puisqu'on en aura besoin à la question 6.

$$\begin{array}{ccc}
 P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\
 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 - L_2 \\
 \\
 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\
 \\
 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} &
 \end{array}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

donc $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

4. $f(u) = 0, f(v) = \sqrt{2}v$ d'après la question 2. et $f(w) = (-\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}w$ donc

$A' = \text{diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. On vérifie le résultat de la question 4. en calculant $PA'P^{-1}$ et on retrouve la matrice A .

Partie B

On considère l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. $M \in F \Leftrightarrow M = aI_3 + bA + cA^2$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille (I_3, A, A^2) en constitue une famille génératrice.

Montrons que cette famille est libre :

$$aI_3 + bA + cA^2 = 0 \Leftrightarrow a + c = b = c = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0 \text{ donc}$$

(I_3, A, A^2) est bien une base de F .

2. $\forall M \in F$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $M = aI_3 + bA + cA^2$ donc

$$AM = aA + bA^2 + cA^3 = (a + 2c)A + bA^2 \text{ d'après A.1. d'où } AM \in F.$$

3. Soit $g : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$

- (a) D'après la question précédente, $\forall M \in F, g(M) \in F$ et

$$\forall M, N \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, g(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = g(M) + \lambda g(N) \text{ donc}$$

$g \in \mathcal{L}(F)$.

- (b) $g(I_3) = A, g(A) = A^2, g(A^2) = A^3 = 2A$ donc

$$\text{la matrice de } g \text{ dans la base } (I_3, A, A^2) \text{ est } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) $g \circ g \circ g(M) = A^3 M = 2AM = 2g(M)$ (ou $B^3 = 2B$).

- (d) $\forall M = aI_3 + bA + cA^2 \in F, M \in \text{Ker } g \Leftrightarrow (a + 2c)A + bA^2 = 0$

$$\Leftrightarrow a + 2c = b = 0 \Leftrightarrow a = -2c \text{ et } b = 0$$

Une base de $\text{Ker}(g)$ est donc constitué par le vecteur non nul $A^2 - 2I_3$.

- (e) D'après le théorème du rang, $\text{rg } g = \dim F - \dim \text{Ker } g = 3 - 1 = 2$.

- (f) $g(M) = A + A^2 = g(I_3) + g(A), M \in F \Leftrightarrow M - I_3 - A \in \text{Ker } g \Leftrightarrow$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M - I_3 - A = a(A^2 - 2I_3) \Leftrightarrow M = (1 - 2a)I_3 + A + aA^2, a \in \mathbb{R}$

Remarque $g(M) = A + A^2 \Leftrightarrow AM = A(I_3 + A)$ mais A n'est pas inversible !! Cette égalité ne se simplifie pas.