Correction du Test n° 22

Sujet A

1. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

   $n^2 \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = -n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -n + \dfrac{1}{2} + o(1)$

   donc $u_n = e^{-n+\frac{1}{2}+o(1)} = e^{-n}\, e^{\frac{1}{2}}\, e^{o(1)} \sim e^{-n}\sqrt{e}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $e^{-1} \in]-1,1[$ convergente, donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$ par comparaison des séries à termes positifs.

2. (a) $F(X) = \dfrac{1}{(2X+1)(2X+3)} = \dfrac{1}{2(2X+1)} - \dfrac{1}{2(2X+3)}$

   (b) $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\right) = \boxed{= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2N+3}+1\right)}$
   par télescopage.

   (c) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{N\to+\infty} S_N \boxed{= \dfrac{1}{2}}$

Correction du Test n° 22

Sujet B

1. $u_n = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} = e^{n^3 \ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)}$

   $n^3 \ln\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) = -n^3 \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = -n^3\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) = -n + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   donc $u_n = e^{-n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-n}\, e^{\frac{1}{2n}}\, e^{o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim e^{-n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $e^{-1} \in]-1,1[$ convergente, donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$ par comparaison des séries à termes positifs.

2. (a) $F(X) = \dfrac{1}{(2X-1)(2X+1)} = \dfrac{1}{2(2X-1)} - \dfrac{1}{2(2X+1)}$

   (b) $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \boxed{= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2N-1}+1\right)}$
   par télescopage.

   (c) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{N\to+\infty} S_N \boxed{= \dfrac{1}{2}}$