Exercice 1 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. (a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?

   $f(x)$ est défini dès lors que $x+1>0$ et $x \neq 0$, donc $D =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

   (b) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $D' = D \cup \{0\}$.

   $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$ donc f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

   (c) Justifier que f est dérivable sur D et calculer f' sur D.

   Sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, f est dérivable car construite avec des fonctions usuelles dérivables, et $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

   $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$.

2. (a) Donner le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.

   $f(x) \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$.

   (b) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D'.

   f admet un D.L. à l'ordre 2 en 0, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

   Nous lisons sur le D.L. en 0 que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(0,1)$ est $y = 1 - \frac{1}{2}x$.

   (d) Montrer en détaillant le raisonnement que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

   $\forall x > 1$, $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, donc $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$,

   donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$, donc $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

   (e) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, ainsi que l'équation d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

   Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

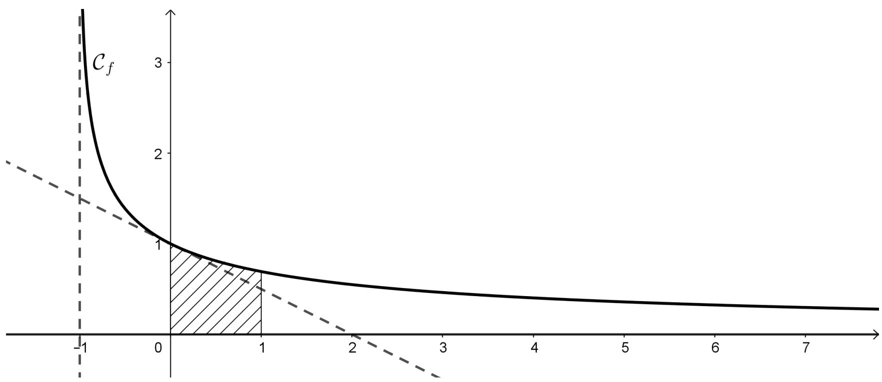
3. (a) Étudier les variations de f.

   On pose $g(x) = x-(x+1)\ln(x+1)$ pour tout $x > -1$. On a $g'(x) = -\ln(x+1)$. Donc g est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$, elle admet donc un maximum en 0, égal à $g(0)=0$, donc g est négative sur $]-1,+\infty[$, donc f' également, et f est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe de f, en faisant apparaître une tangente et deux asymptotes de celle-ci.

4. Quelle est la nature de la série $\sum f(n)$?

   Pour tout entier $n \geq 2$, $f(n) = \frac{\ln(1+n)}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$, or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc, par comparaison, la série $\sum f(n)$ diverge.



Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions polynomiales P_n et Q_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$
$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k^2} = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$$

1. (a) Préciser pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

   L'intégrale est bien définie car la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,1]$.

   (b) En utilisant le graphique de la question 3b, donner un encadrement de L entre deux entiers consécutifs.

   L est égale à l'aire en unités d'aire de la surface hachurée comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Nous voyons sur le graphique que $0 \leq L \leq 1$.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$.

   Il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-t$.

   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

   On intègre entre 0 et x : $\displaystyle\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

   donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x (-1)^k t^k \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

   donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \big[\ln(1+t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

   donc $\displaystyle P_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

(a) Établir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, et $\forall t \in [0,x]$, $\left|\dfrac{(-t)^n}{1+t}\right| \leq \dfrac{t^n}{1+t} \leq t^n$,

donc $|R_n(x)| \leq \displaystyle\int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

(b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$, $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$, $Q_n'(x) = \dfrac{P_n(x)}{x}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note g_n l'application définie par : $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = Q_n'(x) - f(x)$.

Justifier que g_n est continue sur $[0,1]$ puis montrer que : $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = Q_n(1) - L$.

Q_n est un polynôme, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc Q_n' est continue sur $[0,1]$, or f est continue sur $[0,1]$, donc g_n est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

$\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(Q_n'(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x = Q_n(1) - L$.

(d) Montrer, en utilisant entre autres 1d et 1a, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $|g_n(x)| \leq \dfrac{x^n}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$,

$g_n(x) = Q_n'(x) - f(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - R_n(x)}{x} - f(x) = -\dfrac{R_n(x)}{x}$

donc $|g_n(x)| = \left|\dfrac{R_n(x)}{x}\right| \leq \dfrac{x^n}{n+1}$.

(e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|Q_n(1) - L| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$.

Donc $|Q_n(1) - L| = \left|\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x$

donc $|Q_n(1) - L| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$, or $\lim \dfrac{1}{(n+1)^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1) = L$.

(f) Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approche L à 10^{-4} près.

Pour $n = 99$, on a $|Q_{99}(1) - L| \leq \dfrac{1}{100^2}$, donc Q_{99} approche L à 10^{-4} près (la valeur exacte de L est $\dfrac{\pi^2}{12}$).

Exercice 2 $\quad I =]0;+\infty[$ et $h(t) = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$

1. (a) $\forall t > 0$, $1 + 1/t > 0$ et $t \neq 0$. Donc $h \in \mathscr{C}^2(I)$ comme produit de composées de fonctions de classes $\mathscr{C}^2$.

(b) $\displaystyle\lim_{t\to0_+}\left(t + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to0_+}\left(1 + \frac{1}{t}\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to0_+} h(t) = +\infty$ par composition et produit de limites.

Cette limite n'étant pas finie, h n'est pas prolongeable par continuité en 0_+.

(c) Pour tout $t > 0$,

$$\left(\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)' = \frac{\frac{-1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t}} = -\frac{1}{t^2 + t}$$

$h'(t) = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) + \left(t+\dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{-1}{t^2+t} = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{2t+1}{2(t^2+t)}$ et

$h''(t) = -\dfrac{1}{t^2+t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2(t^2+t)-(2t+1)^2}{(t^2+t)^2} = \dfrac{1}{2(t^2+t)^2}$

Donc $\boxed{\forall t \in I,\ h'(t) = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{2t+1}{2t^2+2t} \text{ et } h''(t) = \dfrac{1}{2(t^2+t)^2}}$

(d) $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et $h(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}\left(t+\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$\dfrac{2t+1}{2t^2+2t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{2t^2} = \dfrac{1}{t}$ donc $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites.

Finalement on a $\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

(e) $\forall t \in I,\ 2(t^2+t)^2 > 0$ donc $h''(t) = \dfrac{1}{2(t^2+t)^2} > 0$

Donc h' est croissante sur I, et $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\boxed{\forall t \in I,\ h'(t) \leq 0}$

(f) Donc h est décroissante sur I, et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que $\boxed{\forall t \in I,\ h(t) \geq 1}$

(g) $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par composition,

$h(t) \underset{+\infty}{=} \left(t+\dfrac{1}{2}\right)\left[\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{1}{3t^3} + o\left(\dfrac{1}{t^3}\right)\right]$

Donc $h(t) \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{12t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\boxed{h(t) - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12t^2}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \times \dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}} = \dfrac{(n+1)!\mathrm{e}^n(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)!\mathrm{e}^n \times \mathrm{e}}$

Donc $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\boxed{\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1}$

(b) D'après le résultat de la question 1. (e), $\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$

De plus $h(n) - 1 \geqslant 0\ \forall n \geqslant 1$ d'après la question 1. (f)

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers un réel } S}$, car tout est positif.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\ln(v_k) - \ln(v_{k+1})] = \ln(v_1) - \ln(v_{n+1})$, comme somme télescopique. Comme $v_1 = \mathrm{e}$, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ S_n = 1 - \ln(v_{n+1})}$

Pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(v_n) = 1 - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - S$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } C = \mathrm{e}^{1-S} > 0}$

(d) On en déduit que $v_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C$.

Par produit, $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{Cn^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}}$

(e) On en déduit que $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C^2n^{2n+1}}{\mathrm{e}^{2n}}$ et $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{2n}}$

Par quotient on obtient $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C\sqrt{n}}{\sqrt{2}\times 4^n}$

Par la formule (F), en multipliant par $\sqrt{2}\times 4^n/\sqrt{n}$, on obtient $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$

(f) En utilisant les deux résultats précédents, on a $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$

On en déduit la formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}$

Exercice 3 Partie A : Étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$,
   donc $\forall k\geq 2$, $\forall x\in[k-1,k]$, $\dfrac{1}{k}\leq\dfrac{1}{x}$, donc $\displaystyle\frac{1}{k}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$
   de même $\forall x\in[k,k+1]$, $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{k}$, donc $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{k}$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\ln(n+1)\leq H_n\leq 1+\ln(n)$.
   On somme l'inégalité précédente : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,
   donc $\displaystyle\int_2^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \int_1^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$
   donc $\ln(n+1)-\ln 2+1\leq H_n\leq \ln n+1$, donc $\ln(n+1)\leq H_n\leq\ln n+1$, car $-\ln 2+1\geq 0$.
3. À l'aide de la relation précédente :

   (a) Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq1}$ diverge vers $+\infty$.
   Or $\lim\ln(n+1)=+\infty$, donc par comparaison $\lim H_n=+\infty$.

   (b) Démontrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   On a, pour tout $n\geq 2$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\leq\dfrac{H_n}{\ln n}\leq 1+\dfrac{1}{\ln n}$

or $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}$, donc $\lim \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$, donc $H_n \sim \ln n$.

4. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

(a) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \leq 0$ d'après la question 1.

$v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \geq 0$ de la même façon.

Enfin, $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to 0$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive.

Par conséquent ces deux suites convergent. On note γ leur limite commune.

D'après la question 2, $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc par passage à la limite, $\gamma \geq 0$.

5. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
$0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

(u_n) est décroissante et tend vers γ, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \gamma$, donc $H_n - \ln n \geq \gamma$.

D'autre part, (v_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma$, donc $H_n - \ln(n+1) \leq \gamma$, donc $H_n - \ln n - \gamma \leq \ln(n+1) - \ln n$.

Finalement, $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

(b) Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ϵ strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ϵ près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

```
def gamma(e)
    H=1
    n=1
    while math.log(1+1/n)>e:
        n+=1
        H=H+1/n
    return H-math.log(n)
```

Partie B : Le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier la convergence de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$.
   La série $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, avec $2>1$, donc la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
2. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\dfrac{1}{k^2}\leq\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$.
   $\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k(k-1)}$ et $k-1<k$, donc $\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\geq\dfrac{1}{k^2}$.
3. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.
   On somme cette inégalité : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, donc $B_n-1\leq 1-\dfrac{1}{n}$ (somme télescopique), donc $B_n\leq 2$.
4. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t\in[0,\pi]$, on pose
   $D_n(t)=1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$.

   (a) Démontrer que, pour tout $n\geq 1$ et tout réel $t\in[0,\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=D_n(t)$.

   $$D_n(t)=1+\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ikt}+e^{ikt}\right)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt).$$

   (b) En déduire que, si $t\in]0,\pi]$, $D_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

   $$\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=e^{-int}\frac{1-\left(e^{it}\right)^{2n+1}}{1-e^{it}}\text{ (progression géométrique)}$$

   donc $D_n(t)=\dfrac{e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}}}\times\dfrac{e^{-int}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}=\dfrac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t}-e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}}=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

   (c) Calculer la valeur de $D_n(0)$.
   $D_n(0)=2n+1$.
5. On considère la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

   $$f:t\longmapsto\begin{cases}\dfrac{t}{\sin t}\text{ si }t>0\\ 1\text{ si }t=0\end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   f est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions continues.
   En 0 : $\dfrac{t}{\sin t}\sim 1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0+}f(t)=1=f(0)$, donc f est continue en 0.
   Finalement, f est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Démontrer que f est dérivable en 0.
   f est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions dérivables.

Pour tout $t>0$, $f'(t)=\dfrac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t}$,
or $\sin t - t\cos t \underset{0}{=} t+\dfrac{t^3}{6}-t\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)+o(t^3)=\dfrac{2}{3}t^3+o(t^3)$,
donc $\dfrac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t}\underset{0}{\sim}\dfrac{2}{3}t$, donc $\lim\limits_{t\to 0+} f'(t)=0$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0, et $f'(0)=0$.

(c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Nous venons de voir que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0, donc finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul, $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}$

$\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t=\left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\mathrm{d}t$

et $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\mathrm{d}t=\left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cos(kt)\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cos(kt)\mathrm{d}t$

$\displaystyle=-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\pi k^2}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi=-\frac{1}{k^2}$

donc $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle B_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{D_n(t)-1}{2}\mathrm{d}t$

Donc $\displaystyle B_n=\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^n\cos(kt)\mathrm{d}t=$
$\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{D_n(t)-1}{2}\mathrm{d}t$

(c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{3}$

(d) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-B_n=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)D_n(t)\mathrm{d}t$.
D'après b),
$\displaystyle B_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{6}$.

(e) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-B_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t}\left(2-\frac{2t}{\pi}\right)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

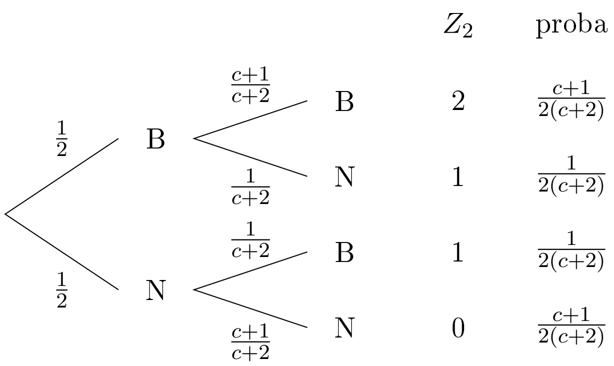
En faisant le changement de variable $u=\dfrac{1}{2}t$, on a $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$ et
$\displaystyle\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)D_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2u-\frac{4u^2}{2\pi}\right)D_n(2u)2\mathrm{d}u=$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{2u}{\pi}\right)2u\frac{\sin\big((2n+1)u\big)}{\sin u}\mathrm{d}u$

donc $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-B_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t}\left(2-\frac{2t}{\pi}\right)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

7. Déterminer g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.
   On prend bien sûr $g(t) = \frac{t}{\sin t}\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)$: g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f de la question 10, et une fonction affine.
8. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$.
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t =$
   $\left[-g(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$
   $= \frac{1}{2n+1}g(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$
   or la fonction g' étant continue sur l'intervalle fermé borné $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle atteint ses bornes, donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|g'(t)| \leq M$, donc $\left|g'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\right| \leq M$,
   et donc $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{2n+1} \times \frac{\pi}{2}$.
   Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$.
9. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$.
   On en déduit que $\lim B_n = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 4 Soient n et c deux entiers naturels fixés, avec $c \geq 1$ et $n \geq 3$. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, réalisant ainsi une succession de n tirages. Pour tout i entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon. On pose alors, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente Z_p, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$?
   Z_p est le nombre de boules blanches tirées après les n tirages.
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
   $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, et $E(X_1) = \frac{1}{2}$.
3. Déterminer la loi de Z_2.



Donc la loi de Z_2 est :

z_i	0	1	2
$P(Z_2 = z_i)$	$\dfrac{c+1}{2(c+2)}$	$\dfrac{2}{2(c+2)}$	$\dfrac{c+1}{2(c+2)}$

4. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Quel est l'ensemble $Z_p(\Omega)$ des valeurs prises par Z_p ?
   $Z_p(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Déterminer, pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, la valeur de $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$.
   Après p tirages, dont k tirages exactement d'une boule blanche, il y a $2 + pc$ boules dans l'urne, dont $1 + kc$ boules blanches, donc $\forall k \in Z_p(\Omega)$,
   $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1+kc}{2+pc}$.
   (c) En déduire que : $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2+pc}$.
   Les événements $(Z_p = k)_{0\leq k\leq p}$ forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales,
   $$P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{p} P\big((Z_p = k) \cap (X_{p+1} = 1)\big) = \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) \times P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$$
   $$= \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) \times \frac{1+kc}{2+pc} = \frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) + \frac{c}{2+pc}\sum_{k=0}^{p} k \times P(Z_p = k)$$
   donc $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1}{2+pc} + \dfrac{c}{2+pc}E(Z_p)$.
5. Montrer par récurrence forte que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, X_p a même loi que X_1.
   Montrons par récurrence que, $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_p : \forall i \in [\![1, p]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   <u>Initialisation</u> : Au rang $p = 1$, nous avons vu à la question 2 que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   <u>Hérédité</u> : Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$,
   on suppose que $\mathcal{P}_p$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   Alors $E(Z_p) = E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E(X_i) = p \times \dfrac{1}{2}$, donc $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + c\frac{p}{2}}{2+pc} = \dfrac{1}{2}$,
   et par conséquent, $X_{p+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.
   <u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence, $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_p$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 5 Dans tout cet exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.
On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

— Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
— Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

— On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n.

Cas particuliers

1. Pour $n = 1$, il n'y a qu'une boule dans l'urne, tirée nécessairement dès de premier tirage, donc $X_1(\Omega) = \{1\}$. Pour $n = 2$, il y a deux boules dans l'urne, ou bien on tire la boule n°1 en première, ou bien on tire d'abord la boule n°2 puis la boule n°1, donc $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
2. X_1 est une variable aléatoire constante égale à 1.
3. (a) $(X_2 = 1)$ est l'évènement « on tire d'abord la boule n°1 parmi 2 boules ». $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$
   (b) Déterminer la loi de X_2.

x	1	2
$P(X_2 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

   (c) $E(X_2) = \dfrac{3}{2}$ et $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Cas général

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 **quelconque**. On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. $I_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et I_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
2. Justifier que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   Il y a n boules dans l'urne : on peut tirer la boule n°1 au premier tirage, auquel cas $X_n = 1$, comme on peut la tirer à chacun des tirages suivants, jusqu'au n-ième inclus, dans le cas où l'on tire les boules dans l'ordre décroissant, la n-ième, puis la $(n-1)$-ième, etc., jusqu'à la n°1 en dernier.
3. $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(X_n = n) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{n!}$
4. Justifier que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n]\!]$, $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$
   Pour $j = 1$, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc égaux.

   Pour $2 \leq j \leq k$, $(I_n = k)$ signifie que l'on a tiré la boule n°k en premier. Il reste donc les boules n°1 à n°$(k-1)$ dans l'urne, c'est-à-dire $(k-1)$ boules. La probabilité d'obtenir la boule n°1 au j-ième tirage, étant donné qu'un tirage a déjà eu lieu, est alors $P(X_{k-1} = j - 1)$.
   Donc $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$.
   Pour $j > k$, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc l'égalité reste valable.
5. En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $j \geq 2$, on a $P(X_n = j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$.

Les évènements $\{(I_n = k)\}_{1\leq k\leq n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales,
$P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P\big((X_n = j)\cap(I_n = k)\big) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j|I_n = k)P(I_n = k)$
$= P(X_n = j|I_n = 1)P(I_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} P(X_n = j|I_n = k)\times\frac{1}{n}$
$= 0 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} P(X_{k-1} = j-1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1).$

6. Démontrer que, pour tout $j\geq 2$, on a
$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)$

D'après la question précédente, on a $nP(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$ et de la même façon, $(n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1)$,

donc $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1) = P(X_{n-1} = j-1)$.

Donc, en divisant par n, $P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)$.

7. (a) Démontrer que $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.

$E(X_n) = \sum_{j=1}^{n} jP(X_n = j) = \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)\right)$
$= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j-1) =$
$\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}E(X_{n-1})$
$= \frac{1}{n} + E(X_{n-1})$.

(b) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, on a : $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Montrons par récurrence que la propriétés $\mathcal{P}_n$: $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est vraie pour tout $n\geq 1$:

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $E(X_1) = 1$.

Hérédité :

soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 1. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
D'après 7.a), $E(X_{n+1}) = E(X_n) + \frac{1}{n+1}$ et par hypothèse de récurrence,
$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,

donc $E(X_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à un.

Exercice 6

a) Puisque P_1, P_2, P_3 appartiennent à E, F est par définition un sous-espace vectoriel de E. La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ étant une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre. C'est donc une base de l'espace qu'elle engendre.
Ainsi $\boxed{\dim F = 3}$.

b) $P \in G$ si et seulement si $P \in E$ et $P = (X^2+1)Q$ c'est-à-dire si et seulement si $P = (X^2+1)Q$ où $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
Or $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\{1, X, X^2+1\}$ d'où $G = \text{Vect}\{X^2+1, (X^2+1)X, (X^2+1)^2\}$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de E admettant la famille $\boxed{\{X^2+1, (X^2+1)X, (X^2+1)^2\} \text{ comme base}}$

c) D'après b) $\boxed{F = G}$.

d) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :
$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$
i.e. $$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

e) D'après d) en prenant $a = 1$ on a que $P \in H$ si et seulement si $$P = \frac{P'''(1)}{3!}(X-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(X-1)^4$$
i.e. $H = \text{Vect}\{(X-1)^3, (X-1)^4\}$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 (la famille $\{(X-1)^3, (X-1)^4\}$ étant libre puisque de degrés échelonnés)

f) Si $P \in G \cap H$, P est divisible par $(X-1)^3$ pour appartenir à H et $P = (X^2+1)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ pour appartenir à G. Puisque X^2+1 ne s'annule pas en 1 il en résulte que Q est divisible par $(X-1)^3$. Mais Q est de degré inférieur strictement à 3, le degré de $(X-1)^3$.
D'où $Q = 0$ et $G \cap H = \{0\}$

Exercice 7

Par suite $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$

f est bien linéaire.

2) $f(X^i) = (X+1)^i - (X-1)^i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

De fait $f(1) = 0$ et, en utilisant le binôme de Newton $f(X^i) = X^i + i X^{i-1} + (\text{termes de degré} < i-1)$
$- (X^i - i X^{i-1} + (\text{termes de degré} < i-1))$

soit $f(X^i) = 2i X^{i-1} + (\text{termes de degré} < i-1)$ et ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Ainsi le degré de $f(X^i)$ est $i-1$ pour $1 \leq i \leq n$

Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\}$

soit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(X), \ldots, f(X^n)\}$ puisque $f(1) = 0$

Or $d^\circ f(X^i) = i-1 \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$. Cette famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ étant à degrés échelonnés est libre. Elle constitue une base de $\mathrm{Im}(f)$ qui est donc de dimension n et plongé dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\quad \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Puisque $\dim \mathrm{Im}(f) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ cela garantit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Par le théorème du rang il vient que

$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \mathrm{rg}(f) = n+1-n = 1$

Comme $1 \in \mathrm{Ker}(f)$ on peut conclure que

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{1\} = \mathbb{R}_0[X]$

3) Par définition $S_N(Q) = \sum_{k=0}^{N} Q(2k+1) = \sum_{k=0}^{N} \left(P(2k+2) - P(2k)\right)$

soit $S_N(Q) = \sum_{k=1}^{N+1} P(2k) - \sum_{k=0}^{N} P(2k) = P(2N+2) - P(0)$

par télescopage. $\boxed{S_N(Q) = P(2N+2) - P(0)}$

4) a) La famille $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ est à degrés échelonnés. Elle est donc libre dans $\mathbb{R}_3[X]$. L'espace vectoriel qu'elle engendre est donc un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4. Or $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$.

D'où $\text{Vect}\{N_0, N_1, N_2, N_3\} = \mathbb{R}_3[X]$.

Etant libre et génératrice, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

$f(N_0) = 0$, $f(N_1) = \frac{X+1}{2} - \frac{X-1}{2} = 1$

$f(N_2) = \frac{(X+1-1)(X+1+1)}{4} - \frac{(X-1-1)(X-1+1)}{4} = \frac{X(X+2) - (X-2)X}{4}$

$= \frac{X}{4}\left(X+2-(X-2)\right) = \frac{X}{4}\cdot 4 = X$

$f(N_3) = \frac{X(X+1)(X+2)}{6} - \frac{(X-2)(X-1)X}{6} = \frac{X}{6}\left[X^2+3X+2 - (X^2-3X+2)\right] = \frac{X}{6}\left[6X\right] = X^2$

Ainsi $\boxed{f(N_0) = 0 \ ; \ f(N_1) = 1 \ ; \ f(N_2) = X, \ f(N_3) = X^2}$

b) D'après 4a) et la linéarité de f on a :

$f(P) = aX^2 + bX + c = a f(N_3) + b f(N_2) + c f(N_1)$
$= f(aN_3 + bN_2 + cN_1) \Leftrightarrow f(P - (aN_3 + bN_2 + cN_1)) = 0$

Par suite P satisfait l'équation $f(P) = aX^2 + bX + c$ si et seulement si $P - (aN_3 + bN_2 + cN_1) \in \mathrm{Ker}(f)$ i.e. si et seulement si $\exists\, d \in \mathbb{R}\ /\ P = aN_3 + bN_2 + cN_1 + d$

c) $S_0(X(X-1)) := \sum_{k=0}^{0} (2k+1)2k = 0$

et $S_0(X(X+2)) := \sum_{k=0}^{0} (2k+1)(2k+3) = 3$

Soit $\boxed{S_0(X(X-1)) = 0 \quad \text{et} \quad S_0(X(X+2)) = 3}$

D'après 4b) $X(X-1) = X^2 - X = f(N_3 - N_2)$

D'où, d'après 3), $S_N(X(X-1)) = (N_3 - N_2)(2N+2)$

$- (N_3 - N_2)(0) = \dfrac{(2N+1)(2N+2)(2N+3)}{6} - \dfrac{(2N+1)(2N+3)}{4}$

$- \left(0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = (2N+1)(2N+3)\left[\frac{N+1}{3} - \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4}$

Soit $\boxed{S_N(X(X-1)) = \dfrac{(2N+1)(2N+3)(4N+1)}{12} - \dfrac{1}{4}}$

(on retrouve bien 0 si $N=0$).

De même $X(X+2) = X^2 + 2X = f(N_3 + 2N_2)$

D'où $S_N(X(X+2)) = (N_3 + 2N_2)(2N+2) - (N_3 + 2N_2)(0)$

$= \dfrac{(2N+1)(2N+2)(2N+3)}{6} + 2 \cdot \dfrac{(2N+1)(2N+3)}{4} - \left(0 + 2\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$

$= (2N+1)(2N+3)\left[\frac{N+1}{3} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}$

Soit $\boxed{S_N(X(X+2)) = \dfrac{(2N+1)(2N+3)(2N+5)}{6} + \dfrac{1}{2}}$

(on retrouve bien 3 si $N=0$)