

Exercice 1 On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. On note \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

Partie A

1. (a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
 (b) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $D' = D \cup \{0\}$. On précisera $f(0)$ et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu.
 (c) Justifier que f est dérivable sur D et calculer f' sur D .
2. (a) Donner le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.
 (b) Prouver que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D' .
 (c) Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en 0.
 (d) Montrer en détaillant le raisonnement que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.
 (e) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, ainsi que l'équation d'une asymptote à \mathcal{C}_f .
3. (a) Étudier les variations de f .
 (b) Tracer l'allure de la courbe de f , en faisant apparaître une tangente et deux asymptotes de celle-ci.
4. Quelle est la nature de la série $\sum f(n)$?

Partie B Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\int_0^1 f(x)dx$. On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions polynomiales P_n et Q_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k^2} = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$$

1. (a) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est bien définie.
 (b) En utilisant le graphique de la question A.3.(b), donner un encadrement de L entre deux entiers consécutifs.
 (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$.
 (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.
2. Dans toute la suite on notera $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$
 (a) Établir la majoration $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
 (b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1]$, $Q'_n(x)$ et $\frac{P_n(x)}{x}$.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note g_n l'application définie par $\forall x \in [0, 1], g_n(x) = Q'_n(x) - f(x)$.
 Justifier que g_n est continue sur $[0, 1]$ puis montrer que $\int_0^1 g_n(x)dx = Q_n(1) - L$.

- (d) Montrer, en utilisant entre autres B.2.(a) et B.2.(b), que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1]$,
 $|g_n(x)| \leq \frac{x^n}{n+1}$.
- (e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |Q_n(1) - L| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(1)$.
- (f) Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approche L à 10^{-4} près.

Exercice 2

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par

$$h(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

- (a) Justifier que la fonction h est de classe C^2 sur l'intervalle I .
- (b) Étudier le prolongement par continuité de h en 0.
- (c) Déterminer les dérivées premières et secondes h' et h'' de h .
- (d) Étudier les limites en $+\infty$ des fonctions h et h' .
- (e) Montrer que $\forall t \in I, h'(t) \leq 0$.
- (f) En déduire que $\forall t \in I, h(t) \geq 1$.
- (g) Montrer que $h(t) - 1 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12t^2}$.
2. On considère à présent la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = h(n) - 1$, où h est la fonction étudiée à la question 1.
- (b) En déduire la convergence de la série de terme général $v_n = \ln \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$
- (c) Après avoir établi que pour $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n v_k = 1 - \ln(u_{n+1})$, montrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive C .
- (d) En déduire un équivalent, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de $n!$ en fonction de puissances de n , de l'exponentielle et de C .
- (e) On admet la formule (F) : $\sqrt{\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}$
 À l'aide de cette formule, calculer C en fonction de π .
- (f) En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Exercice 3

Partie A Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n -ième nombre

harmonique par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

2. En déduire que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. On considère désormais les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \quad v_n = H_n - \ln(n + 1)$$

- (a) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
 - (b) En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ .
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Partie B : Le problème de Bâle Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ par $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier la convergence de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
3. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 2.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on pose $D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$

- (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, $\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = D_n(t)$

- (b) En déduire que, si $t \in]0, \pi]$, $D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

- (c) Calculer la valeur de $D_n(0)$.

5. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- (a) Démontrer que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (b) Donner le développement limité de $(t - \sin t)$ en 0 à l'ordre 3.
- (c) Démontrer que f est dérivable en 0.

- (d) Donner le développement limité de $(\sin t - t \cos t)$ en 0 à l'ordre 3.
- (e) Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 6. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul, $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$
- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2} dt$
- (c) Déterminer la valeur de $\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt$
- (d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t) dt$$

- (e) En déduire à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{2}t$ que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin((2n+1)t) dt$$

- 7. Déterminer une fonction g de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt$$

- 8. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$$

- 9. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 4 Soient n et c deux entiers naturels fixés, avec $c \geq 1$ et $n \geq 3$. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, réalisant ainsi une succession de n tirages. Pour tout i entre 1 et n , on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au i -ème tirage, et 0 sinon. On pose alors, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$.

- 1. Que représente Z_p , pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$?
- 2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
- 3. Déterminer la loi de Z_2 .
- 4. Soit $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.
 - (a) Quel est l'ensemble $Z_p(\Omega)$ des valeurs prises par Z_p ?
 - (b) Déterminer, pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, la valeur de $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$.

(c) En déduire que : $P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.

5. Montrer par récurrence forte que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_p a même loi que X_1 .

Exercice 5 Dans tout cet exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n . On tire une boule au hasard dans U_n . On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k - 1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
- On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.

Partie A Cas particuliers

1. Déterminer $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.
2. Quelle est la loi de X_1 ?
3. (a) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Déterminer $P(X_2 = 1)$.
(b) Déterminer la loi de X_2 .
(c) Calculer l'espérance et la variance de X_2 .

Partie B Cas général On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 **quelconque**.

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n .

1. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par I_n , noté $I_n(\Omega)$, et donner la loi de I_n .
2. Justifier que $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.
3. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
4. Justifier que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$
5. En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $j \geq 2$,

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$$

6. Démontrer que, pour tout $j \geq 2$, $P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1)$
On pourra exprimer $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$ en utilisant le résultat de la question précédente.

7. (a) Démontrer que $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 6 Considérons dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ les polynômes $P_1 = 1 + X^2, P_2 = X(1 + X^2)$ et $P_3 = (1 + X^2)^2$ ainsi que les ensembles $F = V \text{ ect } \{P_1, P_2, P_3\}, G = \{P \in E, (X^2 + 1) \text{ divise } P\}$ et $H = \{P \in E, P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
2. Traduire algébriquement l'information : « $(X^2 + 1) \text{ divise } P \in E$ ». Montrer que si la famille de polynômes $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est libre il en est de même de $\{(X^2 + 1)Q_1, (X^2 + 1)Q_2, (X^2 + 1)Q_3\}$.
3. En déduire que G est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.
4. Justifier que $F = G$.
5. Rappeler la formule de Taylor pour les polynômes.
6. Justifier que H est également un sous-espace vectoriel de E. En donner une base et sa dimension.
7. Montrer que si $(X^2 + 1) \text{ divise } (X - 1)^3 A, A \in E$ alors $(X^2 + 1) \text{ divise } A$.
8. En déduire que $G \cap H$ se réduit au polynôme nul.
9. G et H sont-ils supplémentaires dans E ? Justifier votre réponse.

Exercice 7 On pose, pour tout entier naturel N $S_N(P) = \sum_{k=0}^N P(2k + 1)$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = Q$ où $Q(X) = P(X + 1) - P(X - 1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le degré de $f(X^i)$ pour $1 \leq i \leq n$. En déduire $\text{Im}(f)$. Déterminer $\text{Ker}(f)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(P) = Q$. Exprimer très simplement $S_N(Q)$ en fonction de P .

4. On suppose désormais que $n = 3$, et on considère les polynômes suivants :

$$N_0 = 1 \quad N_1 = \frac{X}{2} \quad N_2 = \frac{(X - 1)(X + 1)}{4} \quad N_3 = \frac{(X - 1)X(X + 1)}{6}$$

a) Montrer que $B = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déterminer les images de ces quatre vecteurs par f .

b) Résoudre l'équation : $f(P) = aX^2 + bX + c$, où a, b, c sont trois réels donnés.

c) Que valent $S_0(X(X - 1))$ et $S_0(X(X + 2))$? Déduire de **4b**) une expression simplifiée des sommes $S_N(X(X - 1)) = 3 \times 2 + 5 \times 4 + 7 \times 6 + \dots + (2N + 1)(2N)$

$$S_N(X(X + 2)) = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots + (2N + 1)(2N + 3)$$