Correction du Devoir maison n° 23

Exercice 1

On étudie la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$, où $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

1. Déterminer, à l'aide d'une I.P.P., un équivalent simple de $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

   Correction : Soit un entier $n \geq 2$ fixé. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = \ln^2(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[1, n]$ et $\forall t \in [1, n]$, on a : $u'(t) = 1$ et $v'(t) = 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t)$.

   Par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, on a :

   $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t = \left[t \ln^2(t)\right]_1^n - 2\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t = n\ln^2(n) - 2\left(n\ln(n) - n + 1\right)$.

   Donc $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t = n\ln^2(n)\left[1 - \frac{2}{\ln(n)} + \frac{2}{\ln^2(n)} - \frac{2}{n\ln^2(n)}\right] \underset{+\infty}{=} n\ln^2(n)(1+o(1))$,

   car $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{2}{\ln(n)} + \frac{2}{\ln^2(n)} - \frac{2}{n\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par opérations sur les limites.

   Donc $\boxed{\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)}$.

2. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

   Correction : Soit un entier $n \geq 2$ fixé.

   $f : t \mapsto \ln^2(t)$ est continue, positive et croissante sur $[1, +\infty[$ donc

   $$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^{k} \ln^2(t)\mathrm{d}t \leq \ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t.$$

   Par sommation de ces inégalités et la relation de Chasles, on a

   $$\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \ln^2(k) \leq \int_2^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t - \int_1^2 \ln^2(t)\mathrm{d}t.$$

   D'après les résultats de la question 1., on a : $\int_1^2 \ln^2(t)\mathrm{d}t = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2$,

   $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$ et $\int_1^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$,

   car $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ et $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   De plus, $n\ln^2(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(1) = 0$, donc $\boxed{u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln^2(k) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)}$, par encadrement.

3. Conclure sur la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$.

Correction : On en déduit que $\dfrac{u_n}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{n}$.

De plus, $\forall n \geq 3$, $\dfrac{\ln^2(n)}{n} \geq \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Par comparaisons de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\ln^2(n)}{n}$ diverge et donc $\boxed{\sum \dfrac{u_n}{n^2} \text{ diverge}}$.

Exercice 2

1. Montrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

   Correction : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

   $$S_{2(N+1)} - S_{2N} = S_{2N+2} - S_{2N} = \frac{(-1)^{2N+1}}{(2N+1)^\alpha} + \frac{(-1)^{2N+2}}{(2N+2)^\alpha} = -\frac{1}{(2N+1)^\alpha} + \frac{1}{(2N+2)^\alpha} \underset{\alpha>0}{\leq} 0,$$

   $$S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = S_{2N+3} - S_{2N+1} = \frac{(-1)^{2N+2}}{(2N+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2N+3}}{(2N+3)^\alpha} = \frac{1}{(2N+2)^\alpha} - \frac{1}{(2N+3)^\alpha} \underset{\alpha>0}{\geq} 0,$$

   $$|S_{2N+1} - S_{2N}| = \left|\frac{(-1)^{2N+1}}{(2N+1)^\alpha}\right| = \frac{1}{(2N+1)^\alpha} \longrightarrow 0.$$

   Donc (S_{2N}) est décroissante, (S_{2N+1}) est croissante et $S_{2N+1} - S_{2N} \longrightarrow 0$.

   Donc $\boxed{\text{les suites } (S_{2N}) \text{ et } (S_{2N+1}) \text{ sont adjacentes}}$.

2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

   Correction : Par le théorème des suites adjacentes, (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent et ont la même limite $S \in \mathbb{R}$.

   On en déduit que (S_N) converge vers S. Donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge}}$.

$\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui est une série de Riemann donc $\boxed{(S_N) \text{ est ACV ssi } \alpha > 1.}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| \longrightarrow 0$ donc

$\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = u_n + v_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $v_n = -\dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$

$v_n \sim -\dfrac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$ et $\alpha > \dfrac{1}{2}$ donc la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge.

Par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum v_n$ converge.

$\sum u_n$ converge d'après la question précédente donc par somme $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \text{ converge.}}$

$\left|\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right| \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\boxed{\text{cette série est ACV ssi } \alpha > 1}$ par comparaison des séries à termes positifs.