

**Exercice 1** On considère la fonction  $f$  définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. (a) Quel est l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  ?

$f(x)$  est défini dès lors que  $x+1 > 0$  et  $x \neq 0$ , donc  $D = ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

- (b) Montrer que  $f$  est prolongeable en une fonction continue sur  $D' = D \cup \{0\}$ .

$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$  donc  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ .

- (c) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $D$  et calculer  $f'$  sur  $D$ .

Sur  $] -1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ,  $f$  est dérivable car construite avec des fonctions usuelles dérivables, et  $\forall x \in ] -1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

2. (a) Donner le développement limité de  $f(x)$  à l'ordre 2 en 0.

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

- (b) Prouver que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D'$ .

$f$  admet un D.L. à l'ordre 2 en 0, donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .

Il faut alors calculer la limite de la dérivée :  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

Avec  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}(1-x+o(x))$  et  $\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$  donc

$f'(x) = -\frac{1}{2} + o(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$  donc  $f$  est bien  $\mathcal{C}^1$  en 0.

- (c) Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 0.

Nous lisons sur le D.L. en 0 que l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point de coordonnées  $(0, 1)$  est  $y = 1 - \frac{1}{2}x$ .

- (d) Montrer en détaillant le raisonnement que  $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ .

$\forall x > 1, \ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ , donc  $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}$ ,

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$ , donc  $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ .

- (e) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , ainsi que l'équation d'une asymptote à  $\mathcal{C}_f$ .

Donc  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

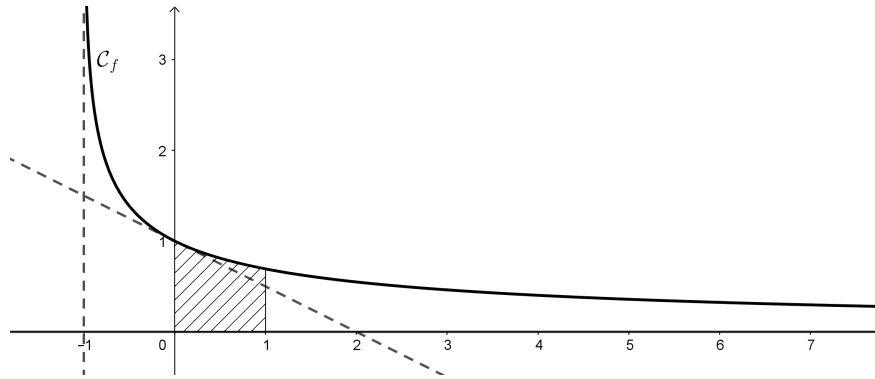
Donc la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ .

3. (a) Étudier les variations de  $f$ .

On pose  $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$  pour tout  $x > -1$ . On a  $g'(x) = -\ln(x+1)$ .

Donc  $g$  est croissante sur  $] -1, 0]$  et décroissante sur  $[0, +\infty[$ , elle admet donc un maximum en 0, égal à  $g(0) = 0$ , donc  $g$  est négative sur  $] -1, +\infty[$ , donc  $f'$  également, et  $f$  est décroissante sur  $] -1, +\infty[$ .

- (b) Tracer l'allure de la courbe de  $f$ , en faisant apparaître une tangente et deux asymptotes de celle-ci.



4. Quelle est la nature de la série  $\sum f(n)$  ?

Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f(n) = \frac{\ln(1+n)}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$ , or la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, donc, par comparaison, la série  $\sum f(n)$  diverge.

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante :  $\int_0^1 f(x)dx$ . On notera  $L$  la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit les fonctions polynomiales  $P_n$  et  $Q_n$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k^2} = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$$

1. (a) Préciser pourquoi l'intégrale  $\int_0^1 f(x) dx$  est bien définie.

L'intégrale est bien définie car la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

(b) En utilisant le graphique de la question 3b, donner un encadrement de  $L$  entre deux entiers consécutifs.

$L$  est égale à l'aire en unités d'aire de la surface hachurée comprise entre l'axe des abscisses, la courbe  $C_f$ , et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ . Nous voyons sur le graphique que  $0 \leq L \leq 1$ .

(c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$ .

Il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $-t$ .

(d) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$ .

On intègre entre 0 et  $x$  :  $\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$

donc  $\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x (-1)^k t^k dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$

donc  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = [\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$

$$\text{donc } P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Dans toute la suite on notera :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$

(a) Établir la majoration :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \text{ et } \forall t \in [0, x], \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n,$$

$$\text{donc } |R_n(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(b) Comparer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $Q'_n(x)$  et  $\frac{P_n(x)}{x}$ .

$$\text{On a, pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in ]0, 1], Q'_n(x) = \frac{P_n(x)}{x}.$$

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $g_n$  l'application définie par :  $\forall x \in [0, 1], g_n(x) = Q'_n(x) - f(x)$ .

Justifier que  $g_n$  est continue sur  $[0, 1]$  puis montrer que :  $\int_0^1 g_n(x) dx = Q_n(1) - L$ .

$Q_n$  est un polynôme, donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , donc  $Q'_n$  est continue sur  $[0, 1]$ , or  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , donc  $g_n$  est continue sur  $[0, 1]$  comme somme de fonctions continues.

$$\int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 (Q'_n(x) - f(x)) dx = Q_n(1) - L.$$

(d) Montrer, en utilisant entre autres **1d** et **1a**, que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |g_n(x)| \leq \frac{x^n}{n+1}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1],$$

$$g_n(x) = Q'_n(x) - f(x) = \frac{P_n(x)}{x} - f(x) = \frac{\ln(1+x) - R_n(x)}{x} - f(x) = -\frac{R_n(x)}{x}$$

$$\text{donc } |g_n(x)| = \left| \frac{R_n(x)}{x} \right| \leq \frac{x^n}{n+1}.$$

(e) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |Q_n(1) - L| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(1)$ .

$$\text{Donc } |Q_n(1) - L| = \left| \int_0^1 g_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$\text{donc } |Q_n(1) - L| \leq \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(1) = L.$$

(f) Déterminer un entier naturel  $N$  tel que  $Q_N(1)$  approche  $L$  à  $10^{-4}$  près.

Pour  $n = 99$ , on a  $|Q_{99}(1) - L| \leq \frac{1}{100^2}$ , donc  $Q_{99}$  approche  $L$  à  $10^{-4}$  près (la valeur exacte de  $L$  est  $\frac{\pi^2}{12}$ ).

**Exercice 2**  $I = ]0; +\infty[$  et  $h(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$

1. (a)  $\forall t > 0, 1 + 1/t > 0$  et  $t \neq 0$ . Donc  $h \in \mathcal{C}^2(I)$  comme produit de composées de fonctions de classes  $\mathcal{C}^2$ .

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{t}\right) = +\infty$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = +\infty$  par composition et produit de limites.

Cette limite n'étant pas finie,  $h$  n'est pas prolongeable par continuité en  $0_+$ .

(c) Pour tout  $t > 0$ ,

$$\left(\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)' = \frac{-1}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} = -\frac{1}{t^2 + t}$$

$$h'(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) + \left(t + \frac{1}{2}\right) \times \frac{-1}{t^2 + t} = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{2t + 1}{2(t^2 + t)} \text{ et}$$

$$h''(t) = -\frac{1}{t^2 + t} - \frac{1}{2} \frac{2(t^2 + t) - (2t + 1)^2}{(t^2 + t)^2} = \frac{1}{2(t^2 + t)^2}$$

Donc  $\forall t \in I, h'(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{2t + 1}{2t^2 + 2t}$  et  $h''(t) = \frac{1}{2(t^2 + t)^2}$

(d)  $\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$  et  $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t} \left(t + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$

$\frac{2t + 1}{2t^2 + 2t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2t}{2t^2} = \frac{1}{t}$  donc  $h'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , par opérations sur les limites.

Finalement on a  $\boxed{h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } h'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0}$

(e)  $\forall t \in I, 2(t^2 + t)^2 > 0$  donc  $h''(t) = \frac{1}{2(t^2 + t)^2} > 0$

Donc  $h'$  est croissante sur  $I$ , et  $h'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que  $\boxed{\forall t \in I, h'(t) \leq 0}$

(f) Donc  $h$  est décroissante sur  $I$ , et  $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ . On en déduit que  $\boxed{\forall t \in I, h(t) \geq 1}$

(g)  $\ln(1 + x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$  et  $\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc, par composition,

$$h(t) \underset{+\infty}{=} \left(t + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right]$$

Donc  $h(t) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{12t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et  $\boxed{h(t) - 1 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12t^2}}$

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \times \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}} = \frac{(n+1)! e^n (n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} (n+1)! e^n \times e}$

Donc  $\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times \frac{1}{e}$  et  $\boxed{\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1}$

(b) D'après le résultat de la question 1. (e),  $\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$

De plus  $h(n) - 1 \geq 0 \forall n \geq 1$  d'après la question 1. (f)

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\boxed{(S_n) \text{ converge vers un réel } S}$ , car tout est positif.

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $S_n = \sum_{k=1}^n [\ln(v_k) - \ln(v_{k+1})] = \ln(v_1) - \ln(v_{n+1})$ , comme somme

télescopique. Comme  $v_1 = e$ ,  $\text{pour tout } n \geq 1, S_n = 1 - \ln(v_{n+1})$

Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\ln(v_n) = 1 - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - S$ . Par continuité de la fonction

exponentielle, la suite  $(v_n)$  converge vers  $C = e^{1-S} > 0$

(d) On en déduit que  $v_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C$ .

Par produit,  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C n^n \sqrt{n}}{e^n}$

(e) On en déduit que  $(n!)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C^2 n^{2n+1}}{e^{2n}}$  et  $(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}}$

Par quotient on obtient  $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C \sqrt{n}}{\sqrt{2} \times 4^n}$

Par la formule (F), en multipliant par  $\sqrt{2} \times 4^n / \sqrt{n}$ , on obtient  $C = \sqrt{2\pi}$

(f) En utilisant les deux résultats précédents, on a  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} n^n \sqrt{n}}{e^n}$

On en déduit la formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

### Exercice 3 Partie A : Étude des nombres harmoniques

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le  $n$ -ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx.$$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$ ,

donc  $\forall k \geq 2, \forall x \in [k-1, k], \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$ , donc  $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$

de même  $\forall x \in [k, k+1], \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ , donc  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

On somme l'inégalité précédente :  $\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ ,

$$\text{donc } \int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

donc  $\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq H_n \leq \ln n + 1$ , donc  $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$ , car  $-\ln 2 + 1 \geq 0$ .

3. À l'aide de la relation précédente :

(a) Démontrer que la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  diverge vers  $+\infty$ .

Or  $\lim \ln(n+1) = +\infty$ , donc par comparaison  $\lim H_n = +\infty$ .

(b) Démontrer que  $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ .

On a, pour tout  $n \geq 2$ ,  $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$

or  $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}$ , donc  $\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$ , donc, d'après le théorème

des gendarmes,  $\lim \frac{H_n}{\ln n} = 1$ , donc  $H_n \sim \ln n$ .

4. On considère désormais les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

(a) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0$  d'après la question 1.

$v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx \geq 0$  de la même façon.

Enfin,  $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$

donc les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

(b) En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive.

Par conséquent ces deux suites convergent. On note  $\gamma$  leur limite commune.

D'après la question 2,  $v_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc par passage à la limite,  $\gamma \geq 0$ .

5. (a) Démontrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$(u_n)$  est décroissante et tend vers  $\gamma$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \gamma$ , donc  $H_n - \ln n \geq \gamma$ .

D'autre part,  $(v_n)$  est croissante, donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq \gamma$ , donc  $H_n - \ln(n+1) \leq \gamma$ ,

donc  $H_n - \ln n - \gamma \leq \ln(n+1) - \ln n$ .

Finalement,  $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

(b) Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel  $\epsilon$  strictement positif et renvoyant une valeur approchée de  $\gamma$  à  $\epsilon$  près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

```
def gamma(e)
    H=1
    n=1
    while math.log(1+1/n)>e:
        n+=1
        H=H+1/n
```

return H-math.log(n)

### Partie B : Le problème de Bâle

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  par

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite  $(B_n)_{n \geq 1}$ . Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

1. Justifier la convergence de la suite  $(B_n)_{n \geq 1}$ .

La série  $\sum \frac{1}{k^2}$  est une série de Riemann convergente, avec  $2 > 1$ , donc la suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

2. Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \text{ et } k-1 < k, \text{ donc } \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k^2}.$$

3. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  est majorée par 2.

On somme cette inégalité :  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$ , donc  $B_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$  (somme télescopique), donc  $B_n \leq 2$ .

4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout réel  $t \in [0, \pi]$ , on pose

$$D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt).$$

- (a) Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$  et tout réel  $t \in [0, \pi]$ ,  $\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = D_n(t)$ .

$$D_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{-ikt} + e^{ikt}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt).$$

- (b) En déduire que, si  $t \in ]0, \pi]$ ,  $D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ .

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = e^{-int} \frac{1 - (e^{it})^{2n+1}}{1 - e^{it}} \text{ (progression géométrique)}$$

$$\text{donc } D_n(t) = \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}}} \times \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

- (c) Calculer la valeur de  $D_n(0)$ .

$$D_n(0) = 2n + 1.$$

5. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Démontrer que  $f$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

$f$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  comme quotient de deux fonctions continues.

En 0 :  $\frac{t}{\sin t} \sim 1$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1 = f(0)$ , donc  $f$  est continue en 0.

Finalement,  $f$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

(b) Démontrer que  $f$  est dérivable en 0.

$f$  est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  comme quotient de deux fonctions dérivables.

Pour tout  $t > 0$ ,  $f'(t) = \frac{\sin t - t \cos t}{\sin^2 t}$ ,

or  $\sin t - t \cos t = t - \frac{t^3}{6} - t \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) + o(t^3) = \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ ,

donc  $\frac{\sin t - t \cos t}{\sin^2 t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}t$ , donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = 0$ , donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée,  $f$  est dérivable en 0, et  $f'(0) = 0$ .

(c) Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  comme quotient de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Nous venons de voir que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'$  est continue en 0, donc finalement  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

6. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel

$$k \text{ non nul, } \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{k} \sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{1}{k} \sin(kt) dt$$

$$\text{et } \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{1}{k} \sin(kt) dt = \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \left(-\frac{1}{k^2}\right) \cos(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k^2}\right) \cos(kt) dt$$

$$= -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\pi k^2} \left[\frac{1}{k} \sin(kt)\right]_0^\pi = -\frac{1}{k^2}$$

$$\text{donc } \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2} dt$

$$\text{Donc } B_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt =$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2} dt$$

(c) Déterminer la valeur de  $\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt$ .

$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

(d) En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t) dt$ .

D'après b),

$$B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t) dt + \frac{\pi^2}{6}.$$

(e) En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin((2n+1)t) dt$ .

En faisant le changement de variable  $u = \frac{1}{2}t$ , on a  $du = \frac{1}{2}dt$  et

$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2u - \frac{4u^2}{2\pi}\right) D_n(2u) 2du =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{2u}{\pi}\right) 2u \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du$$

$$\text{donc } \frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin((2n+1)t) dt.$$

7. Déterminer  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  telle que  $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt$ .

On prend bien sûr  $g(t) = \frac{t}{\sin t} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)$  :  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  comme produit de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $f$  de la question 10, et une fonction affine.

8. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt =$$

$$\left[-g(t) \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t) \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) dt$$

$$= \frac{1}{2n+1} g(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t) \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) dt$$

or la fonction  $g'$  étant continue sur l'intervalle fermé borné  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , elle atteint ses bornes, donc  $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |g'(t)| \leq M$ , donc  $|g'(t) \cos((2n+1)t)| \leq M$ ,

$$\text{et donc } \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t) \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) dt \right| \leq \frac{M}{2n+1} \times \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Finalement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt = 0.$$

9. En déduire la limite de la suite  $(B_n)_{n \geq 1}$ .

$$\text{On en déduit que } \lim B_n = \frac{\pi^2}{6}$$

**Exercice 4** Soient  $n$  et  $c$  deux entiers naturels fixés, avec  $c \geq 1$  et  $n \geq 3$ . Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, avec  $c$  boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, réalisant ainsi une succession de  $n$  tirages. Pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au  $i$ -ème tirage, et 0 sinon. On pose alors, pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$ .

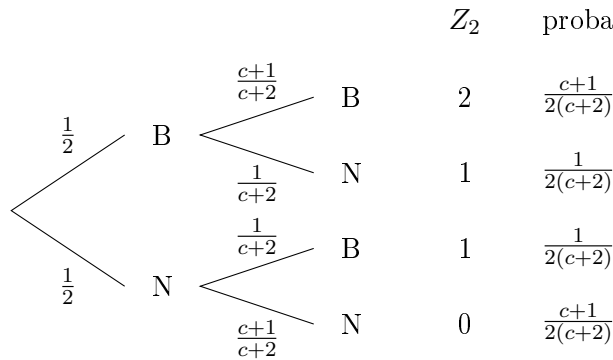
1. Que représente  $Z_p$ , pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ?

$Z_p$  est le nombre de boules blanches tirées après les  $n$  tirages.

2. Donner la loi de  $X_1$  et son espérance.

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right), \text{ et } E(X_1) = \frac{1}{2}.$$

3. Déterminer la loi de  $Z_2$ .



Donc la loi de  $Z_2$  est :

$z_i$	0	1	2
$P(Z_2 = z_i)$	$\frac{c+1}{2(c+2)}$	$\frac{2}{2(c+2)}$	$\frac{c+1}{2(c+2)}$

4. Soit  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

(a) Quel est l'ensemble  $Z_p(\Omega)$  des valeurs prises par  $Z_p$  ?

$$Z_p(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

(b) Déterminer, pour tout  $k \in Z_p(\Omega)$ , la valeur de  $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$ .

Après  $p$  tirages, dont  $k$  tirages exactement d'une boule blanche, il y a  $2 + pc$  boules dans l'urne, dont  $1 + kc$  boules blanches, donc  $\forall k \in Z_p(\Omega)$ ,

$$P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + kc}{2 + pc}.$$

(c) En déduire que :  $P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$ .

Les événements  $(Z_p = k)_{0 \leq k \leq p}$  forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^p P((Z_p = k) \cap (X_{p+1} = 1)) = \sum_{k=0}^p P(Z_p = k) \times P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) \\ &= \sum_{k=0}^p P(Z_p = k) \times \frac{1 + kc}{2 + pc} = \frac{1}{2 + pc} \sum_{k=0}^p P(Z_p = k) + \frac{c}{2 + pc} \sum_{k=0}^p k \times P(Z_p = k) \\ \text{donc } P(X_{p+1} = 1) &= \frac{1}{2 + pc} + \frac{c}{2 + pc} E(Z_p). \end{aligned}$$

5. Montrer par récurrence forte que pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_p$  a même loi que  $X_1$ .

Montrons par récurrence que,  $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}_p : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Initialisation : Au rang  $p = 1$ , nous avons vu à la question 2 que  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ , donc  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Hérédité : Pour tout  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,

on suppose que  $\mathcal{P}_p$  est vraie, c'est-à-dire que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Alors  $E(Z_p) = E\left(\sum_{i=1}^p X_i\right) = \sum_{i=1}^p E(X_i) = p \times \frac{1}{2}$ , donc  $P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\frac{p}{2}}{2 + pc} = \frac{1}{2}$ ,

et par conséquent,  $X_{p+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ , donc  $\mathcal{P}_{p+1}$  est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,  $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{P}_p$  est vraie, c'est-à-dire que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

**Exercice 5** Dans tout cet exercice, on désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

On dispose d'une urne  $U_n$  contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire une boule au hasard dans  $U_n$ . On note  $k$  le numéro de cette boule.

- Si  $k$  est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si  $k$  est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne  $U_n$  les boules numérotées de  $k$  à  $n$  (il reste donc les boules numérotées de 1 à  $k - 1$ ), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
- On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note  $\Omega$  l'univers de cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$  l'espérance et la variance de  $X_n$ .

### Cas particuliers

1. Pour  $n = 1$ , il n'y a qu'une boule dans l'urne, tirée nécessairement dès de premier tirage, donc  $X_1(\Omega) = \{1\}$ . Pour  $n = 2$ , il y a deux boules dans l'urne, ou bien on tire la boule n°1 en première, ou bien on tire d'abord la boule n°2 puis la boule n°1, donc  $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$ .

2.  $X_1$  est une variable aléatoire constante égale à 1.

3. (a)  $(X_2 = 1)$  est l'évènement « on tire d'abord la boule n°1 parmi 2 boules ».

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

- (b) Déterminer la loi de  $X_2$ .

$x$	1	2
$P(X_2 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- (c)  $E(X_2) = \frac{3}{2}$  et  $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$ .

### Cas général

On désigne par  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 **quelconque**. On note  $I_n$  la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne  $U_n$ .

1.  $I_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $I_n$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

2. Justifier que  $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Il y a  $n$  boules dans l'urne : on peut tirer la boule n°1 au premier tirage, auquel cas  $X_n = 1$ , comme on peut la tirer à chacun des tirages suivants, jusqu'au  $n$ -ième inclus, dans le cas où l'on tire les boules dans l'ordre décroissant, la  $n$ -ième, puis la  $(n - 1)$ -ième, etc., jusqu'à la n°1 en dernier.

3.  $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$  et  $P(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$

4. Justifier que, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$

Pour  $j = 1$ , les deux membres de l'égalité sont nuls, donc égaux.

Pour  $2 \leq j \leq k$ ,  $(I_n = k)$  signifie que l'on a tiré la boule n° $k$  en premier. Il reste donc les boules n°1 à n° $(k - 1)$  dans l'urne, c'est-à-dire  $(k - 1)$  boules. La probabilité d'obtenir la

boule n°1 au  $j$ -ième tirage, étant donné qu'un tirage a déjà eu lieu, est alors

$$P(X_{k-1} = j - 1).$$

Donc  $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$ .

Pour  $j > k$ , les deux membres de l'égalité sont nuls, donc l'égalité reste valable.

5. En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout  $j \geq 2$ , on a

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1).$$

Les évènements  $\{(I_n = k)\}_{1 \leq k \leq n}$  forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{k=1}^n P((X_n = j) \cap (I_n = k)) = \sum_{k=1}^n P(X_n = j | I_n = k) P(I_n = k) \\ &= P(X_n = j | I_n = 1) P(I_n = 1) + \sum_{k=2}^n P(X_n = j | I_n = k) \times \frac{1}{n} \\ &= 0 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n P(X_{k-1} = j - 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1). \end{aligned}$$

6. Démontrer que, pour tout  $j \geq 2$ , on a

$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1)$$

D'après la question précédente, on a  $nP(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$  et de la même

$$\text{façon, } (n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j - 1),$$

$$\text{donc } nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j - 1) = P(X_{n-1} = j - 1).$$

Donc, en divisant par  $n$ ,  $P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1)$ .

7. (a) Démontrer que  $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$ .

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{j=1}^n j P(X_n = j) = \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^n j \left( \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1) \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n j P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j P(X_{n-1} = j - 1) = \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} E(X_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} + E(X_{n-1}). \end{aligned}$$

- (b) En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

Montrons par récurrence que la propriétés  $\mathcal{P}_n : E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  est vraie pour tout

$n \geq 1$  :

Initialisation : Pour  $n = 1$ , on a bien  $E(X_1) = 1$ .

Hérédité :

soit  $n$  un entier quelconque supérieur ou égal à 1. On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

D'après 7.a),  $E(X_{n+1}) = E(X_n) + \frac{1}{n+1}$  et par hypothèse de récurrence,

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

donc  $E(X_{n+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$

Conclusion : D'après le principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n$  supérieur ou égal à un.

**Exercice 6**

a) Puisque  $P_1, P_2, P_3$  appartiennent à  $E$ ,  $F$  est par définition un sous-espace vectoriel de  $E$ . La famille  $\{P_1, P_2, P_3\}$  étant une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre. C'est donc une base de l'espace qu'elle engendre.  
Ainsi  $\dim F = 3$ .

b)  $P \in G$  si et seulement si  $P \in E$  et  $P = (X+1)Q$  c'est-à-dire si et seulement si  $P = (X+1)Q$  où  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ .  
Or  $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\{1, X, X^2\}$  d'où  $G = \text{Vect}\{(X+1), (X+1)X, (X+1)^2\}$ . C'est donc bien un sous-espace vectoriel de  $E$  admettant la famille  $\{(X+1), (X+1)X, (X+1)^2\}$  comme base.

c) D'après b)  $F = G$ .

d) Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  alors, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

i.e.  $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ .

e) D'après d) en prenant  $a=1$  on a que  $P \in H$  si et seulement si  $P = \frac{P''(1)}{2!}(X-1)^2 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(X-1)^4$   
i.e.  $H = \text{Vect}\{(X-1)^2, (X-1)^4\}$ . C'est donc bien un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2 (la famille  $\{(X-1)^2, (X-1)^4\}$  étant libre puisque de degrés échelonnés)

f) Si  $P \in G \cap H$ ,  $P$  est divisible par  $(X-1)^3$  pour appartenir à  $H$  et  $P = (X+1)Q$  avec  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$  pour appartenir à  $G$ . Puisque  $X+1$  ne s'annule pas en 1 il en résulte que  $Q$  est divisible par  $(X-1)^3$ . Mais  $Q$  est de degré inférieur strictement à 3, le degré de  $(X-1)^3$ .  
D'où  $Q=0$  et  $G \cap H = \{0\}$ .

**Exercice 7**

Par suite  $f(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \lambda_1 f(p_1) + \lambda_2 f(p_2)$

$f$  est bien linéaire.

2)  $f(x^i) = (x+1)^i - (x-1)^i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

De fait  $f(1) = 0$  et, en utilisant le binôme de Newton  $f(x^i) = x^i + i x^{i-1} + (\text{termes de degré } < i-1) - (x^i - i x^{i-1} + (\text{termes de degré } < i-1))$

soit  $f(x^i) = 2i x^{i-1} + (\text{termes de degré } < i-1)$  et ce pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Ainsi le degré de  $f(x^i)$  est  $i-1$  pour  $1 \leq i \leq n$

Comme  $\mathcal{I}_m(f) = \text{Vect}\{f(1), f(x), \dots, f(x^n)\}$

soit  $\mathcal{I}_m(f) = \text{Vect}\{f(x), \dots, f(x^n)\}$  puisque  $f(1) = 0$

Or  $d^0 f(x^i) = i-1 \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Cette famille génératrice de  $\mathcal{I}_m(f)$  étant à degrés échelonnés est libre. Elle constitue une base de  $\mathcal{I}_m(f)$  qui est donc de dimension  $n$  et plongé dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .  $\mathcal{I}_m(f) \subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

Puisque  $\dim \mathcal{I}_m(f) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$  cela garantit que  $\mathcal{I}_m(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

Par le théorème du rang il vient que

$$\dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \text{rg}(f) = n+1 - n = 1$$

Comme  $1 \in \text{Ker}(f)$  on peut conclure que

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{R}_0[X]$$

3) Par définition  $S_N(Q) = \sum_{k=0}^N (Q(2k+1) - \sum_{k=0}^N (P(2k+2) - P(2k)))$   
 soit  $S_N(Q) = \sum_{k=1}^{N+1} P(2k) - \sum_{k=0}^N P(2k) = P(2N+2) - P(0)$   
 par télescopage.  $S_N(Q) = P(2N+2) - P(0)$

4) 2) la famille  $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$  est à degrés croissants  
 Elle est donc libre dans  $\mathbb{R}_3[X]$ . L'espace vectoriel  
 qu'elle engendre est donc un sous-espace de  $\mathbb{R}_3[X]$   
 de dimension 4. Or  $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ .

D'où  $\text{Vect}\{N_0, N_1, N_2, N_3\} = \mathbb{R}_3[X]$ .

Etat libre et génératrice, B est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

$f(N_0) = 0$ ,  $f(N_1) = \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} = 1$   
 $f(N_2) = \frac{(x+1)(x+1)}{4} - \frac{(x-1)(x-1)}{4} = \frac{x(x+2) - (x-2)x}{4}$   
 $= \frac{x}{4} (x+2 - (x-2)) = \frac{x}{4} \cdot 4 = x$

$f(N_3) = \frac{x(x+1)(x+2)}{6} - \frac{(x-2)(x-1)x}{6} = \frac{x}{6} [x^2 + 3x + 2 - (x^2 - 3x + 2)]$   
 $= \frac{x}{6} [6x] = x^2$

Ainsi  $f(N_0) = 0$ ;  $f(N_1) = 1$ ;  $f(N_2) = x$ ;  $f(N_3) = x^2$

b) D'après 4a) et la linéarité de  $f$  on a :

$f(P) = a x^2 + b x + c = a f(N_3) + b f(N_2) + c f(N_1)$   
 $= f(a N_3 + b N_2 + c N_1) \Leftrightarrow f(P - (a N_3 + b N_2 + c N_1)) = 0$

Par suite  $P$  satisfait l'équation  $f(P) = aX^2 + bX + c$   
 si et seulement si  $P = (aN_3 + bN_2 + cN_1) \in \text{Ker}(f)$  i.e.  
 si et seulement si  $\exists d \in \mathbb{R} / P = aN_3 + bN_2 + cN_1 + d$

$$c) \sum_0(X(X-1)) := \sum_{k=0}^0 (2k+1)2k = 0$$

$$\text{et } \sum_0(X(X+2)) := \sum_{k=0}^0 (2k+1)(2k+3) = 3$$

$$\text{soit } \boxed{\sum_0(X(X-1)) = 0 \text{ et } \sum_0(X(X+2)) = 3}$$

$$\text{D'après 4b) } X(X-1) = X^2 - X = f(N_3 - N_2)$$

$$\text{D'où, d'après 3), } \sum_N(X(X-1)) = (N_3 - N_2)(2N+2)$$

$$- (N_3 - N_2)(0) = \frac{(2N+1)(2N+2)(2N+3)}{6} - \frac{(2N+1)(2N+3)}{4}$$

$$- \left(0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = (2N+1)(2N+3) \left[ \frac{N+1}{3} - \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4}$$

$$\text{soit } \boxed{\sum_N(X(X-1)) = \frac{(2N+1)(2N+3)(4N+1)}{12} - \frac{1}{4}}$$

(on retrouve bien 0 si  $N=0$ ).

$$\text{De même } X(X+2) = X^2 + 2X = f(N_3 + 2N_2)$$

$$\text{D'où } \sum_N(X(X+2)) = (N_3 + 2N_2)(2N+2) - (N_3 + 2N_2)(0)$$

$$= \frac{(2N+1)(2N+2)(2N+3)}{6} + 2 \cdot \frac{(2N+1)(2N+3)}{4} - \left(0 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= (2N+1)(2N+3) \left[ \frac{N+1}{3} + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2}$$

$$\text{soit } \boxed{\sum_N(X(X+2)) = \frac{(2N+1)(2N+3)(2N+5)}{6} + \frac{1}{2}}$$

(on retrouve bien 3 si  $N=0$ )