Correction du Test n° 23 et dernier !

Sujet A

Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne.

1. X_1 est le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage. $X_1(\Omega) = [\![0, 3]\!]$ $P(X_1 = 0) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

   Pour avoir $X_1 = 1$, il faut tirer deux boules 1 parmi les trois disponibles, et une boule parmi les trois autres, $P(X_1 = 1) = 3 \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

   Pour avoir $X_1 = 2$, il faut tirer une boule 1 parmi les trois disponibles, et deux boules parmi les trois autres, $P(X_1 = 2) = 3 \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{9}{20}$

   Pour avoir $X_1 = 3$, il faut tirer les deux boules 2 et la boule 3
   $P(X_1 = 3) = 3 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X_1 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

   $E(X_1) = \frac{0 \times 1 + 1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{20} = \frac{3}{2}$

   $E(X_1^2) = \frac{0 \times 1 + 1 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \times 1}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10}$ et $V(X_1) = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}$

2. X_2 est le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne. $X_2(\Omega) = [\![3, 6]\!]$

   Pour avoir $X_2 = 3$, il faut tirer les trois boules 1 lors des trois premiers tirages, on a vu que cela se produisait avec probabilité $\frac{1}{20}$

   Pour avoir $X_2 = 4$, il faut tirer deux boules 1 lors des trois premiers tirages (probabilité $\frac{9}{20}$ d'après la question précédente), puis lors du quatrième tirage, tirer la dernière boule 1 parmi les trois restantes, ce qui se produit avec probabilité
   $\frac{1}{3}$,$P(X_2 = 4) = \frac{9}{20} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$

   De même, pour $X_2 = 5$, il faut tirer deux boules 1 et deux autres sur les quatre premiers tirages puis tirer la boule 1 au cinquième tirage parmi les deux restantes,

   $$P(X_2 = 5) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

On obtient par soustraction $P(X_2=6)=\dfrac{1}{2}$ (il y a une chance sur deux que la dernière boule à tirer soit une numéro 1 puisque la moitié des boules au départ sont numérotées 1).

k	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X_2=k)$	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$

$E(X_2)=\dfrac{3}{20}+\dfrac{12}{20}+\dfrac{15}{10}+\dfrac{6}{2}=\dfrac{105}{20}=\dfrac{21}{4}$ et $E(X_2^2)=\dfrac{9+48+150+360}{20}=\dfrac{567}{20}$ puis

$$V(X_2)=\frac{567}{20}-\frac{441}{16}=\frac{63}{80}$$

Correction du Test n° 23 et dernier !

Sujet B

Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne.

1. X_1 est le rang du tirage de la boule numérotée 3.
   X_1 prend toutes les valeurs de 1 à 6 avec probabilité $\dfrac{1}{6}$, car $P(X_1=1)=\dfrac{1}{6}$
   $P(X_1=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{5}$
   $P(X_1=3)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}$ $P(X_1=4)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}$, $P(X_1=5)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}$
   $P(X_1=6)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1$ d'après la formule des probabilités composées.
   X_1 suit la loi uniforme de paramètre 6 et $E(X_1)=\dfrac{7}{2}$
   $E(X_1^2)=\dfrac{1+4+9+16+25+36}{6}=\dfrac{91}{6}$ et $V(X_1)=\dfrac{91}{6}-\dfrac{49}{4}=\dfrac{35}{12}$

2. X_2 est la somme des numéros tirés lors des trois premiers tirages. $X_2(\Omega)=[\![3,7]\!]$
   Pour obtenir 3, il faut tirer les trois numéros 1, la probabilité correspondante vaut $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$
   Pour avoir 4, il faut tirer deux 1 et un 2, ce qui donne $3\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{10}$
   Pour le 5, on peut tirer deux 1 et un 3 : $3\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}$ ou bien un 1 et les deux 2 : $3\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}$ ce qui donne $\dfrac{3}{10}$
   Pour une somme de 6, il faut un 1, un 2 et un 3 : $6\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{10}$
   et pour le 7 : $3\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$

k	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

$E(X_2) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{10} + \dfrac{15}{10} + \dfrac{18}{10} + \dfrac{7}{20} = 5$ et

$E(X_2^2) = \dfrac{9 + 96 + 150 + 216 + 49}{20} = \dfrac{520}{20} = 26$ puis $V(X_2) = 26 - 25 = 1$