

Correction du concours blanc n° 2

Partie 1

Exercice 1 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Partie A

1. f est c^1 sur \mathbb{R}_+^* comme composée et quotient de fonctions c^1 avec $\sqrt{x} \neq 0$.

2. $\frac{\text{Arctan}(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ et $\sqrt{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ donc $\frac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$.

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1 = f(0)$ et f est continue en 0.

3. (a) h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - \sqrt{x} \times 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(1+x) - 2\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}(1+x)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1-x-(1+x)}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} \\ h'(x) &= -\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} < 0 \end{aligned}$$

Ainsi, h est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

(b) Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \sqrt{x} - \frac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \text{Arctan}(\sqrt{x}) \right)$$

$$f'(x) = \frac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$$

(c) h est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ donc, pour tout $x > 0$, $h(x) < h(0) = 0$. Ainsi,

$f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

4. (a) Le $DL_4(0)$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + o(t^4)$.

On en déduit le $DL_5(0)$ de Arctan : $\text{Arctan}(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$ car $\arctan(0) = 0$

$$f(x) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5} + o(x^2\sqrt{x}) \right)$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)$$

(b) f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{3}$

$$(c) \quad T : y = 1 - \frac{x}{3}$$

De plus, $f(x) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{5} + o(x^2)$ donc $f(x) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{5}$.

Ainsi, au voisinage de 0 (à droite), $f(x) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) \geq 0$ donc

C est au-dessus de T au voisinage de 0.

Partie B

1. (a) La fonction f est continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+ donc, par le théorème fondamental du calcul intégral, g est bien définie sur \mathbb{R}_+ et est l'unique primitive de f qui s'annule en 1.

Ainsi, g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $g'(x) = f(x)$.

- (b) f est décroissante sur \mathbb{R}_+ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ sur \mathbb{R}_+ . g est alors strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

2. Soit $x \geq 1$. $\forall t \in [1, x]$, $\text{Arctan}(\sqrt{t}) \geq \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ car la fonction arctangente est croissante sur \mathbb{R} . Comme $\sqrt{t} > 0$, $f(t) \geq \frac{\pi}{4\sqrt{t}}$.

Par croissance de l'intégrale (puisque $1 \leq x$) $\int_1^x f(t) dt \geq \frac{\pi}{2} \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{2} [\sqrt{t}]_1^x$

Donc $g(x) \geq \frac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1)$

Comme $\frac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. Soit $x > 0$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t) = \text{Arctan}(\sqrt{t})$ et $v(t) = 2\sqrt{t}$; u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t} \cdot 1+t}$, $v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Par intégration par parties :

$$g(x) = [2\sqrt{t} \text{Arctan}(\sqrt{t})]_1^x - \int_1^x \frac{1}{1+t} dt = 2\sqrt{x} \text{Arctan}(\sqrt{x}) - 2\frac{\pi}{4} - [\ln(1+t)]_1^x$$

$$g(x) = 2\sqrt{x} \text{Arctan}(\sqrt{x}) - \ln(1+x) + \ln(2) - \frac{\pi}{2}$$

Partie C

1. Sur \mathbb{R}_+^* , $(E_0) \iff y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = 0$.

(E_0) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x}$ sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x)$ donc les solutions de (E_0) sur \mathbb{R}_+^*

sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2} \ln(x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x > 0$. On pose $u = \sqrt{t}$, $t \mapsto \sqrt{t}$ est bien de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

On a $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$, et si $t = 1$, alors $u = 1$; si $t = x$, alors $u = \sqrt{x}$

$$\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)} dt = \int_1^x \frac{1}{1+t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2} du = [\text{Arctan}(u)]_1^{\sqrt{x}}$$

Ainsi, $\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)} dt = \text{Arctan}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4}$.

(b) Sur \mathbb{R}_+^* , $(E) \iff y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = \frac{1}{2x(1+x)}$.

Posons $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}$ où $\lambda : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Par la méthode de la

variation de la constante, $\forall x > 0, \lambda'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

Par la question précédente, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ est $x \mapsto \text{Arctan}(\sqrt{x})$

donc $f : x \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ est une solution particulière de (E) sur \mathbb{R}_+^* .

3. On en déduit que les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{x}) + \lambda}{\sqrt{x}} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et, par 2. (b), f est bien solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* . De plus $f(0) = 1$ donc $2 \times 0 \times f'(0) + f(0) = 1 = \frac{1}{1+0}$. Ainsi, f est solution de (E) sur \mathbb{R}_+ .

Réciproquement, soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur \mathbb{R}_+ . y est aussi solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* donc il existe un réel λ tel que, pour tout $x > 0$

$$y(x) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{x}) + \lambda}{\sqrt{x}} = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}.$$

Or y est continue en 0 donc y a une limite finie en 0.

On sait que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et que, si $\lambda > 0$, $\frac{\lambda}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ et, si $\lambda < 0$, $\frac{\lambda}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$.

Ainsi, si $\lambda \neq 0$, $f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ n'a pas de limite finie en 0.

On en déduit que la seule possibilité est $\lambda = 0$, i.e que pour tout $x > 0, y(x) = f(x)$. De plus, y et f sont continues en 0 donc cette égalité est aussi vraie en 0. Finalement,

f est l'unique solution de (F) sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2

1. Nature de quelques séries numériques

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

(b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_{2N+1} - U_{2N} = \frac{-1}{2N+1} \rightarrow 0$,

$$U_{2N+2} - U_{2N} = \frac{1}{2N+2} - \frac{1}{2N+1} < 0 \text{ et}$$

$$U_{2N+3} - U_{2N+1} = -\frac{1}{2N+3} + \frac{1}{2N+2} > 0$$

car la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}_+^*

Donc (U_{2N}) est décroissante, (U_{2N+1}) est croissante et $U_{2N+1} - U_{2N} \rightarrow 0$.

Donc les suites (U_{2N}) et (U_{2N+1}) sont adjacentes.

Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent et ont la même limite. Comme il s'agit des suites extraites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs

de la suite (U_N) , on en déduit que (U_N) converge aussi vers cette limite. Donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge.}}$$

(c) En 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Donc, en $+\infty$,

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge, donc } \boxed{\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \text{ converge.}}$$

2. Expression intégrale des sommes partielles $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. $I_n = \int_0^\pi u_1(t) v_1'(t) dt$, où

$u_1 : t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v_1 : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par intégration par parties,

$$I_n = [u_1(t) v_1(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u_1'(t) v_1(t) dt = \frac{-1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(nt) dt.$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(nt) dt = \int_0^\pi u_2(t) v_2'(t) dt, \text{ où}$$

$u_2 : t \mapsto \frac{t}{\pi} - 1$ et $v_2 : t \mapsto \frac{-\cos(nt)}{n}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par intégration par parties,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(nt) dt = [u_2(t) v_2(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u_2'(t) v_2(t) dt = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt.$$

$$\int_0^\pi \cos(nt) dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = 0. \text{ Finalement, on a bien } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{n^2}}$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. C_N est continue sur $[0, \pi]$, comme somme de fonctions qui le sont.

$$\boxed{C_N(0) = N}$$

Soit $t \in]0, \pi]$ fixé. $C_N(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N (e^{it})^n \right)$ et $e^{it} \neq 1$, donc

$$\sum_{n=1}^N e^{int} = e^{it} \times \frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} = e^{it} \times \frac{e^{i\frac{Nt}{2}} (e^{-i\frac{Nt}{2}} - e^{i\frac{Nt}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}} (e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})} = e^{i\frac{(N+1)t}{2}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{Nt}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

$$\text{Ainsi, } C_N(t) = \frac{\cos\left(\frac{(N+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{Nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(N+1)t}{2} + \frac{Nt}{2}\right) - \sin\left(\frac{(N+1)t}{2} - \frac{Nt}{2}\right) \right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Finalement, $\forall t \in]0, \pi], C_N(t) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$

(c) $\forall t \in]0, \pi], 0 < \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$.

Ainsi, φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$, comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall t \in]0, \pi], \varphi'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \times 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \times \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ et $\frac{t^2}{2\pi} - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$ donc $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1 = \varphi(0)$. Donc

φ est continue en 0.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \times 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \times \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ & \underset{t \rightarrow 0}{=} \left(-1 + \frac{t}{\pi}\right) (t + o(t^2)) - \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) (1 + o(t)) \\ & \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^2}{2\pi} + o(t^2). \end{aligned}$$

De plus, $4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$, donc $\varphi'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}$.

φ est continue sur $[0, \pi]$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$ donc, par le théorème de la limite de la dérivée, φ est bien dérivable en 0, $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$ et φ' est continue en 0. Ainsi,

φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.

(d) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après le résultat 2.(a) et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_N(t) dt.$$

D'après le résultat 2.(b), on a $S_N = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \left(\frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right) dt$.

Donc $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N = \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$

3. Calcul de la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

(a) Pour $\lambda > 0$, on pose $I(\lambda) = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$.

f et $t \mapsto \cos(\lambda t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, donc f' est bornée sur $[a, b]$ et par intégration par parties,

$$I(\lambda) = \left[-\frac{1}{\lambda} f(t) \cos(\lambda t) \right]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |I(\lambda)| &\leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(b)| |\cos(\lambda b)| + |f(a)| |\cos(\lambda a)| + \int_a^b |f'(t)| |\cos(\lambda t)| dt \right) \\ &\stackrel{|\cos| \leq 1}{\leq} \frac{|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors $I(\lambda) = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

(b) Ainsi, comme φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$, $\int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par le résultat 2.(d), $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = \left[\frac{-t^3}{12\pi} + \frac{t^2}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6}$

Donc $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$