

Concours blanc n° 2

La partie 1 doit être traitée séparément de la partie 2. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez **Partie 1** et **Partie 2** sur ces copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Partie 1

Exercice 1 11,5 points : **A. 5 points** (A.1. 0.5 A.2. 0.5 A.3.(a) 1 A.3.(b) 0.5 A.3.(c) 0.5 A.4.(a) 1 A.4.(b) 0.5 A.4.(c) 0.5)
B. 3 points (B.1.(a) 0.5 B.1.(b) 0.5 B.2. 1 B.3. 1)
C. 3.5 points (C.1. 0.5 C.2.(a) 1 C.2.(b) 0.5 C.3. 0.5 C.4. 1)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note C sa courbe dans un repère du plan.

Partie A Étude de la fonction f

- Justifier que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Étudier la continuité de la fonction f en 0.
- On note $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x} - \arctan(\sqrt{x})$.
 - Montrer que h est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et en déduire son signe sur \mathbb{R}_+ .
 - Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$ pour tout $x > 0$.
 - En déduire que f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
- Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
 - En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
 - Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en 0 et donner la position relative de T et C au voisinage de 0.

Partie B Étude d'une intégrale

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \int_1^x f(t) dt$

1. (a) Justifier que g est bien définie et est dérivable sur \mathbb{R}_+ . Déterminer sa dérivée.
(b) Quelles sont les variations de g sur \mathbb{R}_+ ?
2. Montrer que $\forall x \geq 1, g(x) \geq \frac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1)$ et en déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'expression de $g(x)$ pour tout $x > 0$.

Partie C Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E) : 2xy' + y = \frac{1}{1+x}$

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation homogène (E_0) associée à (E) .
2. (a) Soit $x > 0$. Calculer $\int_1^x \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)}$ à l'aide du changement de variables $u = \sqrt{t}$.
(b) En déduire une solution particulière de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
4. Justifier que f est l'unique solution de (E) sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2 8,5 points : 1.(a) 0.5 1.(b) 1.5 1.(c) 1 2.(a) 1 2.(b) 1.5 2.(c) 1.5
2.(d) 0.5 3.(a) 0.5 3.(b) 0.5

L'objectif principal de cet exercice est le calcul de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. Nature de quelques séries numériques

(a) Rappeler sans justifier la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

(b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$

Montrer que les suites (U_{2N}) et (U_{2N+1}) sont adjacentes.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

(c) À l'aide d'un développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$,

déduire des résultats précédents la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

2. **Expression intégrale des sommes partielles** $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt$.

En utilisant deux intégrations par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n^2}$

(b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \pi]$, on pose $C_N(t) = \sum_{n=1}^N \cos(nt)$.

Justifier que la fonction $t \mapsto C_N(t)$ est continue sur $[0, \pi]$ et calculer $C_N(0)$.

Montrer que $\forall t \in]0, \pi]$, $C_N(t) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$

(c) On considère la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$ puis que φ est continue en 0.

Calculer $\varphi'(t)$ pour tout $t \in]0, \pi]$ puis montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 en 0.

(d) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$.

3. **Calcul de la valeur de la somme** $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

(a) Soit $\lambda > 0$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ ($a < b$).

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

(b) En déduire la valeur de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$