CB2 – Juin 26 – Partie 2

Ex1 Représentons le système $S_{\lambda\alpha}$ par la matrice $M_{\lambda\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \lambda & \alpha \\ 3 & -\lambda & 1 & \alpha \end{array}\right)$
et appliquons la méthode du pivot de Gauss.

$$M_{\lambda\alpha} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \alpha \\ 2 & -1 & 1 & \alpha \\ 3 & -\lambda & 1 & \alpha \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & -3 & 1-2\lambda & -\alpha \\ 0 & -\lambda-3 & 1-3\lambda & -2\alpha \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{2\lambda-1}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & -\lambda-3 & 1-3\lambda & -2\alpha \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{2\lambda-1}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda}{3}(\lambda-2) & \frac{\alpha}{3}(\lambda-3) \end{array}\right) \quad (*)$$

1) Pour que le système soit incompatible, il est nécessaire qu'il soit de rang 2 i.e. que $\lambda \in \{0,2\}$. Réciproquement, si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$, il est nécessaire que $\alpha \neq 0$ pour que le système soit incompatible.

Ainsi $S_{\lambda\alpha}$ est incompatible si et seulement si $\boxed{\lambda \in \{0,2\} \text{ et } \alpha \neq 0}$

2) $S_{\lambda\alpha}$ admet une infinité de solutions s'il est de rang 2 compatible i.e. ssi $\boxed{\lambda \in \{0,2\} \text{ et } \alpha = 0}$

si $\lambda = 0$ et $\alpha = 0$ D'après $(*)$ $M_{0,0} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d'où $\begin{cases} x = -\frac{p}{3} \\ y = \frac{p}{3} \\ z = p, \ p \in \mathbb{R} \end{cases}$

si $\lambda = 2$ et $\alpha = 0$ $M_{2,0} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d'où $\begin{cases} x = -p \\ y = -p \\ z = p, \ p \in \mathbb{R} \end{cases}$

3) $S_{\lambda\alpha}$ admet une unique solution s'il est de rang 3 i.e. $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,2\}}$

Alors $M_{\lambda\alpha} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{2\lambda-1}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda-3}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{\lambda-1}{2(\lambda-2)}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-1}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda-3}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-1}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda-3}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha \end{array}\right)$

Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 2$, l'unique solution est donc :

$$\left(x = \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha,\ y = \frac{\lambda-1}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha,\ z = \frac{\lambda-3}{2\lambda(\lambda-2)}\alpha\right)$$

Ex2 1) $\phi(\vec{u}) = \phi(-\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) := (-1+4-3)\vec{e}_1 + (-2-4+6)\vec{e}_2 + (-3+3)\vec{e}_3 = \vec{0}$. Donc $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\phi$

2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ en travaillant dans la base $\mathcal{B}$. Or $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

D'où $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ et comme ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\operatorname{Im}\phi$.

3) D'après 2) et le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} \phi = 1$. On en déduit de 1/ que $\{\vec{u}\}$ est une base du noyau de ϕ.

4/ On cherche $\vec{w}$ tel que $\phi(\vec{w}) = \vec{u}$. Notons $X \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ les coordonnées de $\vec{w}$. Elles doivent satisfaire.

$AX = \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ représenté matriciellement par

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = 1 - \frac{p}{3} \\ y = -2 + \frac{4}{3}p \\ z = p \,,\ p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On peut choisir $p = 0$ ce qui nous donne

$\underline{\vec{w} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2}$ comme antécédent de $\vec{u}$.

La famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{u}, \vec{w})$ est représentée matriciellement (en travaillant dans $\mathcal{B}$) par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

étant de rang 3, $\mathcal{F}$ est donc libre. Etant de cardinalité 3 égale à la dimension de E, c'est une base de E.

P.4

5) $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & -1 & 2\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\Phi(\vec{e_2}+\vec{e_3}) = \vec{e_2}+\vec{e_3}$.

Puisque $\Phi(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\Phi(\vec{w}) = \vec{u}$, on a donc :

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$ on sait que $\underline{A' = P^{-1}AP}$

6) $A'^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ainsi que $A'^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\forall n \geq 2$.

On en déduit que $A^n = A^2$ $\forall n \geq 2$ puisque $A^n = PA'^nP^{-1}$.

Or $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & -1 & 2\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\6 & 3 & -2\\6 & 3 & -2\end{pmatrix} = A^n \quad \forall n \geq 2}$

7) $(\Phi^n)^2 = \Phi^n$ $\forall n \geq 2$ puisque $(A^n)^2 = A^n$ $\forall n \geq 2$.

Φ^n est donc un <u>projecteur</u> dès que $n \geq 2$.

C'est le projecteur sur la droite $\text{Vect}\{\vec{e_2}+\vec{e_3}\}$ parallèlement au plan $\text{Vect}\{\vec{u},\vec{w}\}$.

Ex 3 A 1)

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_1(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\\ \sigma_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(2n-1)}{3} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\end{aligned}}$$

2) Si $t \neq 0$, $e^t \neq 1$ d'où $\sum_{k=0}^{n-1}(e^t)^k = \frac{e^{nt}-1}{e^t-1}$

et $\boxed{F_n(t) = \frac{e^{nt}-1}{e^t-1} \quad \forall t \neq 0}$.

f_n n'est autre que la restriction de F_n à $\mathbb{R}^*$. Or F_n, comme somme d'exponentielles, est C^∞ sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat annoncé puisque f_n se prolonge en F_n.

3) $$e^{kt} = 1 + kt + \frac{k^2t^2}{2!} + \dots + \frac{k^m t^m}{m!} + o(t^m) \quad \forall k$$

d'où $$F_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kt} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) t + \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^2\right)\frac{t^2}{2!} + \dots + \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^m\right)\frac{t^m}{m!}$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} o(t^m)$$

soit $$\boxed{F_n(t) = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k(n)\frac{t^k}{k!} + o(t^m)}$$

B 1) $$G(x,t) = \frac{t\left(1 + xt + \frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^3t^3}{6} + o(t^3)\right)}{t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)}$$

$$= \frac{1 + xt + \frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^3t^3}{6} + o(t^3)}{1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + o(t^3)}$$

Or $$\frac{1}{1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + o(t^3)} = 1 - \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24}\right) + \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6}\right)^2 - \frac{t^3}{8} + o(t^3)$$

$$= 1 - \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24}\right) + \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6}\right) - \frac{t^3}{8} + o(t^3)$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + o(t^3)$$ le terme en t^3 disparaît.

Ainsi $$G(x,t) = \left(1 + xt + \frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^3t^3}{6}\right)\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12}\right) + o(t^3)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} G(x,t) = 1 + t\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{t^2}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) + \frac{t^3}{6}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}\right) + o(t^3) \\ B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\ B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} \end{array}}$$

2) $\partial_x G(x,t) = \partial_x \left(\frac{t e^{xt}}{e^t - 1}\right) = \frac{t}{e^t-1} \partial_x (e^{xt}) = \frac{t^2 e^{xt}}{e^t - 1}$ d'où

$$\underline{\partial_x G(x,t) = t\, G(x,t)}$$

Puisque $\partial_x G(x,t) = \sum_{k=0}^{m} B_k'(x) \frac{t^k}{k!} + o(t^m)$

et $t G(x,t) = \sum_{k=0}^{m} B_k(x) \frac{t^{k+1}}{k!} + o(t^{m+1})$, ceci $\forall m \in \mathbb{N}$,

on en déduit, par unicité d'un DL, que

$$\boxed{B_{k+1}'(x) = (k+1) B_k(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

3) $\int_0^1 G(x,t)\,dx = \int_0^1 \frac{t e^{xt}}{e^t - 1} dx = \frac{t}{e^t-1} \int_0^1 e^{xt} dx = \frac{t}{e^t-1} \left[\frac{e^{xt}}{t}\right]_0^1$

donc $\int_0^1 G(x,t)\,dx = 1 = \sum_{k=0}^{m} \left(\int_0^1 B_k(x)\,dx\right) \frac{t^k}{k!} + o(t^m)$.

Cela implique que $\boxed{\int_0^1 B_k(x)\,dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*}$

(unicité du DL).

et bien sûr $\int_0^1 B_0(x)\,dx = 1$ puisque $B_0(x) = 1$.

C 1) $t F_n(t) = t \frac{e^{nt}-1}{e^t - 1} = \frac{t e^{nt}}{e^t-1} - \frac{t}{e^t-1} = G(n,t) - G(0,t)$

En passant aux DL cela donne :

$$\sum_{k=0}^{m} \sigma_k(n) \frac{t^{k+1}}{k!} + o(t^{m+1}) = \sum_{k=0}^{m} (B_k(n) - B_k(0)) \frac{t^k}{k!} + o(t^m)$$

L'unicité des DL fournit l'identité :

$$\boxed{\sigma_k(n) = \frac{B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0)}{k+1}}$$

2) On peut donc prendre $P_k(x) = \frac{B_{k+1}(x)}{k+1}$.

$\sigma_2(n) = P_2(n) - P_2(0) = \frac{B_3(n) - B_3(0)}{3}$

$B_3(n) = n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}$ et $B_3(0) = 0$

d'où $\boxed{\sigma_2(n) = \frac{n^3}{3} - \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{6}}$ tel que trouvé en A 1).