CB2 de Mathématiques - Partie 2

jeudi 25 juin 2026

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

<u>Exercice 1</u> (Systèmes linéaires) (4 pts: **1)** 0.5 **2)** 0.5+0.5+0.5 **3)** 1+1)

Associons à tout couple $(\lambda,\, \alpha)$ de réels le système linéaire $S_{\lambda,\alpha}$ $\begin{cases} 2x - y + z &= \alpha \\ x + y + \lambda z &= \alpha \\ 3x - \lambda y + z &= \alpha \end{cases}$ d'inconnue le triplet $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant *à la lettre* la méthode du pivot de Gauss pour justifier vos réponses, on traitera les questions suivantes

1) Pour quelles valeurs du couple $(\lambda,\, \alpha)$ le système $S_{\lambda,\alpha}$ est-il incompatible?

2) Pour quelles valeurs du couple $(\lambda,\, \alpha)$ le système $S_{\lambda,\alpha}$ admet une infinité de solutions? Expliciter l'ensemble des solutions dans chacun de ces cas.

3) Pour quelles valeurs du couple $(\lambda,\, \alpha)$ le système $S_{\lambda,\alpha}$ admet une unique solution? Expliciter l'ensemble des solutions dans chacun de ces cas.

<u>Exercice 2</u> (Endomorphismes) (8 pts: **1)** 0.5 **2)** 0.5+0.5 **3)** 1 **4)** 1+1 **5)** 0.5+0.5 **6)** 0.5+1 **7)** 1)

Soit E un espace vectoriel réel admettant $\mathcal{B} = \left(\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\right)$ comme base.
L'identité de E est classiquement noté id_E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par
$\phi\left(x_1\, \vec{e}_1 + x_2\, \vec{e}_2 + x_3\, \vec{e}_3\right) = (x_1 + x_2 - x_3)\, \vec{e}_1 + (2\,x_1 - x_2 + 2\,x_3)\, \vec{e}_2 + (3\,x_1 + x_3)\, \vec{e}_3$.
On pose $\vec{u} = -\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3$.

1) Évaluer $\phi(\vec{u})$.

2) Déterminer la matrice représentative A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi qu'une base de l'image $\mathcal{Im}(\phi)$ de ϕ.

3) En déduire une base du noyau $\mathcal{Ker}(\phi)$ de ϕ.

4) Déterminer un vecteur $\vec{w}$ antécédent de $\vec{u}$ par ϕ puis montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\, \vec{u},\, \vec{w}\right)$ est une base de E. On notera P la matrice représentative de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

5) Déterminer la matrice représentative A' de ϕ dans la base $\mathcal{F}$. Quelle relation lie A, A' et P?

6) Calculer A'^n puis en déduire A^n pour tout entier n.

7) À partir du **6)** décrire géométriquement ϕ^n pour tout entier $n \geq 2$.

<u>Exercice 3</u> (Calcul algébrique) (8 pts: **A-1)** 0.5+0.5 **2)** 0.5+0.5 **3)** 0.5 **B-1)** 1.5 **2)** 0.5+0.5 **3)** 0.5+0.5 **C-1)** 1 **2)** 0.5+0.5)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ notons $\boldsymbol{\sigma_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i^k}$la somme des puissances k-ièmes des entiers de 0 à $n-1$. Par analogie au traitement classique d'une intégrale, l'object de cet exercice consiste à mettre en évidence l'existence de polynômes $P_k(x)$ *primitives discrètes* de x^k de sorte que $\sigma_k(n) = P_k(n) - P_k(0)$.

A - Dérivées *d'* ordre *k*

1) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_1(n)$ et $\sigma_2(n)$ comme polynômes de la variable n. On donnera leurs formes développées.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$posons $F_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{k t}$. Prouver que, $\forall\, t \neq 0$, $F_n(t) = \frac{e^{n t}-1}{e^t-1}$. Expliquer pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{e^{n t}-1}{e^t-1}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ valant n en 0.

3) Montrer que, pour tout m, le DL de F_n en 0 à l'ordre m s'écrit $F_n(t) = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k(n) \frac{t^k}{k!} + o(t^m)$.

B - Fonction génératrice

Notons $G(x, t) = \frac{t\, e^{x t}}{e^t-1}$. On acceptera que, pour tout x fixé, cette fonction de la variable t se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe C^∞ satisfaisant $G(x, 0) = 1$. Elle admet donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, un DL à l'ordre m en t=0. Ce DL s'écrit $G(x, t) = \sum_{k=0}^{m} B_k(x) \frac{t^k}{k!} + o(t^m)$ les $B_k(x)$ étant des polynômes.

1) Déterminer ce DL à l'ordre 3. On précisera donc les expressions de $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, et $B_3(x)$.

2) Dériver $G(x, t)$ par rapport à x (en fixant t cette fois). On notera $\partial_x G(x, t)$ cette dérivée et on la comparera à $G(x, t)$. En admettant que $\partial_x G(x, t) = \sum_{k=0}^{m} B_k'(x) \frac{t^k}{k!} + o(t^m)$ où B_k' est la dérivée de B_k, et en notant que $t\, G(x, t) = \sum_{k=0}^{m} B_k(x) \frac{t^{k+1}}{k!} + o\left(t^{m+1}\right)$, quelle relation doivent nécessairement satisfaire les polynômes B_k?

3) Pour tout t fixé, calculer $\int_0^1 G(x, t)\, dx$. Sachant que $\int_0^1 G(x, t)\, dx = \sum_{k=0}^{m} \left(\int_0^1 B_k(x)\, dx\right) \frac{t^k}{k!} + o(t^m)$, quelle autre propriété doivent satisfaire les polynômes B_k?

C - Primitivation

1) En observant que $t\, F_n(t) = G(n, t) - G(0, t)$, relier $\sigma_k(n)$ à $B_{k+1}(n)$ et $B_{k+1}(0)$.

2) En déduire une *primitive discrète* $P_k(x)$ de x^k de sorte que $\sigma_k(n) = P_k(n) - P_k(0)$. Vérifier à l'aide de cette formule l'expression de $\sigma_2(n)$ donnée à la question **A-1)**.