# Correction du devoir maison n° 7

**Exercice 1** *Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients variables.*

Raisonnons par analyse-synthèse :

— Analyse : Soit $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.

$P$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$P'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1$ et $P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots + 2a_2$.

Si $P$ est solution de $(E)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} & (1-x^2)(n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots + 2a_2) - 3x(n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1) + 15(a_n x^n + \ldots + a_0) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (-n^2 - 2n + 15)a_n x^n + \ldots + 2a_2 + 15a_0 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vérifiée ssi tous les coefficients du polynôme du membre de gauche sont nuls, en particulier $(-n^2 - 2n + 15)a_n$.

Or $a_n \neq 0$, donc $-n^2 - 2n + 15 = (n+5)(3-n) = 0$. Comme $n \in \mathbb{N}$ alors $n = 3$.

$\boxed{\text{Si } P \text{ est un polynôme solution de } (E) \text{ alors il est de degré } 3}$.

— Synthèse : Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré 3. $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $P''(x) = 6ax + 2b$.

$P$ est un polynôme solution de $(E)$ et vérifiant $P'(0) = -4$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} & (1-x^2)(6ax + 2b) - 3x(3ax^2 + 2bx + c) + 15(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0 \text{ et } c = -4 \\ \Leftrightarrow \quad & 7bx^2 + (6a - 48)x + (2b + 15d) = 0 \text{ et } c = -4. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié si $\left\{ \begin{array}{ccc} 7b & = & 0 \\ 6a - 48 & = & 0 \\ 2b + 15d & = & 0 \\ c & = & -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} b & = & 0 \\ a & = & 8 \\ d & = & 0 \\ c & = & -4 \end{array} \right.$

Finalement, si $\boxed{P(x) = 8x^3 - 4x}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ : $P'(x) = 24x^2 - 4$, $P''(x) = 48x$,

$(1-x^2)P''(x) - 3xP'(x) + 15P(x) = (1-x^2)48x - 3x(24x^2 - 4) + 15(8x^3 - 4x) = 0$,

et $P'(0) = -4$.

**Exercice 2**

1. Soit $m \in \mathbb{R}$

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & m \end{array}\right. ,$$ de paramètre $m$ et d'inconnues $x$, $y$ et $z$.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} x & + & y & + & mz = 1 & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ & & & & (m-1)y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & & & (m-1)z = 1-m & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ & & (1-m)y & + & (1-m)z = 1-m^2 & L_4 \leftarrow L_4 - mL_1 \end{array}\right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x + y + & mz & = 1 & \\ & (m-1)y & = 0 & \\ & (m-1)z & = 1-m & \\ & 0 & = 2-m-m^2 & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

On en déduit que $(S)$ est compatible ssi $2-m-m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -2$

$\boxed{(S) \text{ est incompatible ssi } m \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}}$.

2. <u>Si $m = -2$</u>

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -2 \\ & & -3y & & & = & 0 \\ & & & & -3z & = & 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, le système $(S)$ admet une unique solution et $\boxed{\S = \{(-1, 0, -1)\}}$.

<u>Si $m = 1$</u>

$(S) \Longleftrightarrow \; x + y + z = 1$ . Dans ce cas, le système $(S)$ admet une infinité de solutions et $\boxed{\S = \{(1-y-z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}}$.

**Exercice 3** *Suite d'intégrales de Wallis.*

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t$. Donc $\boxed{u_0 = \dfrac{\pi}{2}}$.

$u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$. Donc $\boxed{u_1 = 1}$.

$u_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$. Donc $\boxed{u_2 = \dfrac{\pi}{4}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t \underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left[\cos(t) - 1\right]\mathrm{d}t.$$

$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$ donc $\cos^n(t) \geq 0$ et $\cos^n(t)\left[\cos(t) - 1\right] \leq 0$.

Par positivité de l'intégrale, on a : $\quad u_n \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$ et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone, la suite $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$.

3. Soit un entier $n \geq 2$ fixé. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = \cos^{n-1}(t)$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ :

$$u'(t) = \cos(t) \text{ et } v'(t) = -(n-1)\sin(t)\cos^{n-2}(t).$$

Ainsi, par intégration par parties et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t = \left[\sin(t)\cos^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\mathrm{d}t.$$

$\sin(0) = 0$ et , comme $n - 1 \geq 1$, $\cos^{n-1}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc, par linéarité, on a :

$$u_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos^2(t)\right]\cos^{n-2}(t)\mathrm{d}t = (n-1)u_{n-2} - (n-1)u_n.$$

Donc $nu_n = u_n + (n-1)u_n = (n-1)u_{n-2}$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 2, \quad u_n = \dfrac{n-1}{n}u_{n-2}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Par la relation précédente, on conjecture que :

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n}u_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}u_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2}u_0,$$

$$u_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}u_{2n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)}u_{2n-3} = \cdots = \frac{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3}u_1.$$

Si $u_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$ et $u_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$ $(HR)$ alors on a :

$$u_{2n+2} \underset{2.(c)}{=} \frac{2n+1}{2n+2}u_{2n} \underset{(HR)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k}, \text{ et}$$

$$u_{2n+3} \underset{2.(c)}{=} \frac{2n+2}{2n+3}u_{2n+1} \underset{(HR)}{=} \frac{2n+2}{2n+3}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k}{2k+1}.$$

Donc l'hérédité est vérifiée. De plus, on a :

$$u_2 \underset{2.(c)}{=} \frac{1}{2}u_0 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{1}\frac{2k-1}{2k} \text{ et } u_3 \underset{2.(c)}{=} \frac{2}{3}u_1 = \prod_{k=1}^{1}\frac{2k}{2k+1}.$$

Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \text{ et } u_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$u_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k-1)}{(2k)(2k)} \boxed{= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}, \text{ et } \ u_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k+1)(2k)} \boxed{= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}.$$

Donc $u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et $\boxed{u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}}$.

6. $(u_n)$ converge vers $\ell$ donc les suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers $\ell$.

   Donc, par produit de limites, $(u_{2n} \cdot u_{2n+1})$ converge vers $\ell^2$.

   De plus, $\dfrac{\pi}{2(2n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, par unicité de la limite, $\ell^2 = 0$ et $\boxed{\ell = 0}$.