Correction du devoir maison n° 8

1. Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.

   (a) On pose $u(x) = x$, $v'(x) = (x-1)^{-n-1}$, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{(x-1)^{-n}}{-n}$.

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et, par intégration par parties et linéarité, on a $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int g(x)\mathrm{d}x &= \int x(x-1)^{-n-1}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x}{n(x-1)^n} + \frac{1}{n}\int (x-1)^{-n}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x}{n(x-1)^n} + \frac{1}{n} \times \frac{(x-1)^{-n+1}}{-n+1}. \end{aligned}$$

   La fonction $\boxed{G : x \mapsto \dfrac{-nx+1}{n(n-1)(x-1)^n} \text{ est une primitive de } g \text{ sur }]1, +\infty[}$.

   (b) Sur $]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$ et $(x-1)y' - ny = 0 \Longleftrightarrow y' - \dfrac{n}{x-1}y = 0$.

   La fonction $a : x \mapsto -\dfrac{n}{x-1}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

   La fonction $A : x \mapsto -n\ln(x-1)$ est une primitive de a sur $]1, +\infty[$.

   La solution générale de l'équation différentielle homogène $(x-1)y' - ny = 0$ sur $]1, +\infty[$ s'écrit donc $\boxed{y_H(x) = C(x-1)^n, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$.

   Pour $x \in]1, +\infty[$, $(E) :\ (x-1)y' - ny = x \Longleftrightarrow y' - \dfrac{n}{x-1}y = \dfrac{x}{x-1}$.

   Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de cette dernière équation de la forme $y_P(x) = C(x)(x-1)^n$, où $C :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $\forall x \in]1, +\infty[$, $y_p'(x) = C'(x)(x-1)^n + n(x-1)^{n-1}$ et

$$y_p'(x) - \frac{n}{x-1}y_p(x) = \frac{x}{x-1} \Longleftrightarrow C'(x)(x-1)^n = \frac{x}{x-1} \Longleftrightarrow C'(x) = g(x).$$

   D'après la question 1. (b), on peut choisir $y_P(x) = G(x)(x-1)^n$.

   La solution générale de (E) s'écrit donc

$$\boxed{y(x) = y_P(x) + y_H(x) = \frac{-nx+1}{n(n-1)} + C(x-1)^n, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}.$$

2. (a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $z(x) = x^2 y(x) \Leftrightarrow y(x) = \dfrac{1}{x^2}, z(x)$.

   Le produit de fonctions deux fois dérivables étant deux fois dérivable, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi y l'est, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$z'(x) = 2xy(x) + x^2y'(x), \quad z''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2y''(x) \quad$ et

$$z''(x) - z(x) = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = \mathrm{e}^x.$$

Donc $\boxed{y \text{ est solution de } (F) \text{ ssi } z \text{ est solution de } (F') : \ z'' - z = \mathrm{e}^x}$.

(b) Léquation homogène $(F'_H) : \ z'' - z = 0$ a pour équation caractéristique

$$(F'_C) : \ r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1.$$

Sa solution générale s'écrit $z_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^x$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique (F'_C), on cherche une solution particulière de (F') de la forme $z_p(x) = \alpha x\mathrm{e}^x$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$z'_p(x) = (\alpha + \alpha x)\mathrm{e}^x, \ z''_p(x) = (2\alpha + \alpha x)\mathrm{e}^x \ $ et

$$z''_p(x) - z_p(x) = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow 2\alpha\mathrm{e}x = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \text{ car } 2\mathrm{e}^x \neq 0.$$

Donc la solution générale de (F') s'écrit

$$z(x) = z_p(x) + z_H(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{2} + C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^x, \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrit

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x^2}z(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2x} + C_1\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} + C_2\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}, \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}}.$$

3. (a) À l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$, $\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$,

$\int e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \int te^t\mathrm{d}t.$

On pose $u' = e^t$ et $v = t$, d'où $u = e^t$ et $v' = 1$: u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties :

$\int te^t\mathrm{d}t = te^t - \int e^t\mathrm{d}t = (t-1)e^t.$

$$\text{donc } \boxed{\int e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = (\sin x - 1)e^{\sin x}.}$$

(b) $y' + \cos(x)y = \sin(2x)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

L'équation homogène est $y' + \cos(x)y = 0$.

$a(x) = \cos x$, d'où $A(x) = \sin x$ et les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-\sin x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Variation de la constante : on pose $y_0(x) = C(x)e^{-\sin x}$,

donc $C'(x) = 2\cos x\sin xe^{\sin x}$, et d'après 1), $C(x) = 2(\sin x - 1)e^{\sin x}$

Par conséquent une solution particulière de l'équation différentielle est $y_0(x) = 2\sin x - 2$.

Enfin, les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto Ce^{-\sin x} + 2\sin x - 2 \qquad C \in \mathbb{R}}$$