

Devoir de vacances

L'un des premiers chapitres que nous aborderons à la rentrée concernera les nombres complexes. Il est vivement conseillé à ceux n'ayant pas suivi l'enseignement de mathématiques expertes de prendre connaissance du cours, même si nous reprendrons tout le programme de terminale.

Par exemple, vous pouvez regarder les vidéos d'Yvan Monka

Un résumé complet du cours <https://www.youtube.com/watch?v=ABo2m52oEYw>

Des exercices d'application immédiate du cours

Écrire un nombre complexe sous forme algébrique (1)

<https://www.youtube.com/watch?v=-aaSfL2fhTY>

Écrire un nombre complexe sous forme algébrique (2)

<https://www.youtube.com/watch?v=1KQIUqzVGqQ>

Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique (1)

<https://www.youtube.com/watch?v=zIbpXlgISc4>

Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique (2)

<https://www.youtube.com/watch?v=RqRQ2m-9Uhw>

Utiliser la forme exponentielle d'un nombre complexe

<https://www.youtube.com/watch?v=8EVfyqyVBKc>

Il est demandé de rédiger le plus rigoureusement possible le plus grand nombre de questions des trois exercices suivants. Ce travail est l'occasion de faire le point sur certains de vos acquis. Une correction vous sera donnée à la rentrée.

Très bonnes vacances !

Exercice 1 Révisions de trigonométrie

1. Donner une mesure en degrés de l'angle α dont une mesure en radians est :

a) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ b) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ c) $\alpha = 0,6$ (Donner une valeur approchée au degré près).

2. Donner une mesure en radians, sous la forme $\frac{a\pi}{b}$ où a et b sont des nombres entiers, de l'angle β dont une mesure en degrés est :

a) $\beta = 12,5$ b) $\beta = 60$ c) $\beta = 168$

3. Dans chaque cas, placer le point M associé au réel x sur le cercle trigonométrique puis donner le cosinus et le sinus du nombre $x = -\pi, -\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}$

4. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I donné :

(a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ $I = [0 ; 2\pi]$. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ $I = [-2\pi ; 2\pi]$.

5. Vrai ou faux ? Justifier.

- (a) Pour tout nombre réel x , $\cos(2x) = 2 \cos(x)$.
- (b) Pour tout nombre réel x , $\cos(x + \pi) = \cos(x)$.
- (c) L'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet 4 solutions dans l'intervalle $[0 ; 4\pi]$.
- (d) L'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet 4 solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
- (e) Si $\cos(x) = \frac{4}{5}$ et si $x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0]$ alors $\sin(x) = -\frac{3}{5}$.
- (f) Pour tout nombre réel x tel que $0 \leq x \leq \pi$, $\cos(x) \geq 0$.
- (g) Si $x \leq y$ alors $\cos(x) \leq \cos(y)$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\cos(x)}$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Démontrer que la fonction f est paire et 2π périodique.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_a à la courbe C au point A d'abscisse a , où a est un réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$.
4. Démontrer que la tangente T_a passe par l'origine si, et seulement si, $a \sin(a) = 1$.
5. On considère la fonction φ définie sur $[0 ; \pi]$ par $\varphi(x) = \sin(x) - \frac{1}{x}$.
 - (a) Étudier les variations de la fonction φ' sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
 - (b) On admet qu'il existe une unique valeur x_0 appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$ telle que $\varphi'(x_0) = 0$ avec $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.
En déduire les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
6. Quel est le nombre de tangentes à la courbe C passant par l'origine ?

Exercice 3 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 1, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 2u_n$ et $v_n = u_n - 2$

1. Démontrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$ pour tout entier naturel n .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
3. Déduire des deux questions précédentes les variations de la suite (v_n) .
4. Peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. Déterminer la limite de (v_n) et en déduire celle de (u_n) .