

Nombres complexes I

Dans tout ce chapitre, i est un nombre vérifiant $i^2 = -1$ et le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1. Un nombre complexe est un nombre pouvant s'écrire $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z .

x et y sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de z , notés respectivement $Re(z)$ et $Im(z)$.

Notations L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

L'ensemble des nombres imaginaires purs, qui s'écrivent $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, est noté $i\mathbb{R}$.

Remarque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Proposition 1. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$ $z \in i\mathbb{R} \iff Re(z) = 0$

$z = z' \iff (Re(z) = Re(z') \text{ et } Im(z) = Im(z'))$.

Les opérations de $\mathbb{R}$ s'étendent naturellement à $\mathbb{C}$, en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

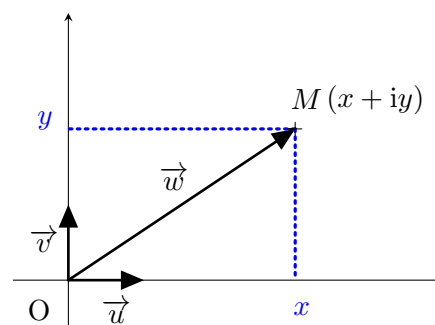
Exemple 1. Écrire sous forme algébrique les nombres $z_1 = (1 + i)(2 + 3i)(1 - i)$ et $z_2 = \frac{3 - i}{2 + 6i}$.

2 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition 2. Soit un nombre complexe $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Le point M de coordonnées (x, y) est appelé **point image** de z ou point **d'affixe** z .

Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (x, y) est appelé **vecteur image** de z ou vecteur **d'affixe** z .



Proposition 2. Soient A, B deux points du plan et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs.

1. $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $z_{k\vec{u}} = kz_{\vec{u}}$.

2. $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$ et le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Exemple 2. A et B ont pour affixes respectives $z_A = 2 + i$ et $z_B = 3 + 3i$.

1. Déterminer l'abscisse de C tel que $OABC$ est un parallélogramme. Quel est son centre ?
2. Calculer les affixes des points A' , B' et C' tels que $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Que dire du quadrilatère $OA'B'C'$?

Proposition 3. Trois points distincts A , B et C du plan sont alignés ssi $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

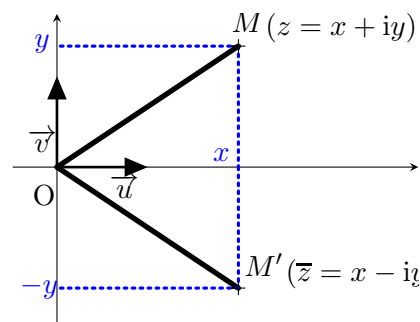
Exemple 3. On considère les points A , B et C d'affixes respectives

$z_A = 3 + i\sqrt{3}$, $z_B = -2i\sqrt{3}$, $z_C = 2$. Montrer que les points A , B et C sont alignés.

3 Conjugaison et opérations

Définition 3. Soit un nombre complexe $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Le **conjugué** de z est le nombre complexe défini par $\bar{z} = x - iy$.



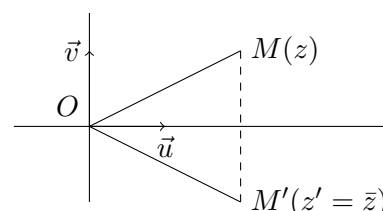
Proposition 4. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$

1. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
2. $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$
3. $\bar{\bar{z}} = z$ et $z\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2 \in \mathbb{R}_+$
4. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ et, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

Exemple 4. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $f(z) = \frac{z + i}{z - 2i}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $f(z) \in i\mathbb{R}$.

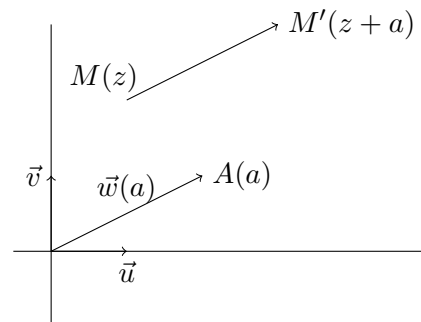
4 Transformations du plan

Théorème 1. La transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(\bar{z})$ est la **symétrie axiale** par rapport à l'axe des abscisses.



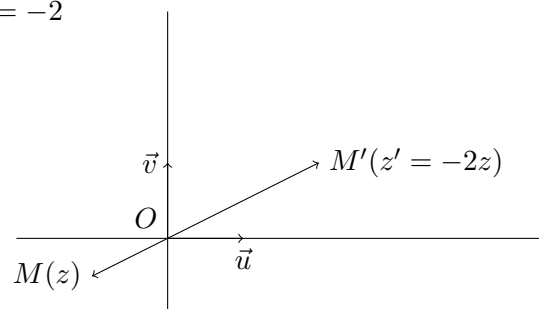
Définition 4. Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe a .

En associant à M d'affixe z , le point M' d'affixe $z' = z + a$, on définit une transformation du plan appelée **translation de vecteur** $\vec{w}$, d'écriture complexe $z \mapsto z + a$.



Définition 5. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. En associant à M d'affixe z , le point M' d'affixe $z' = kz$, on définit une transformation du plan appelée **homothétie de centre O et de rapport k**, d'écriture complexe $z \mapsto kz$.

$\lambda = -2$



Remarque Si on note h l'homothétie de centre O et de rapport k , alors pour tout $M \neq O$:

$$M' = h(M) \iff \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

Définition 6. Soit f une transformation du plan.

Un point M est dit **invariant** par f si $f(M) = M$.

Propriété 1. L'ensemble des points invariants par une transformation f est l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $f(z) = z$.

Définition 7. La translation de vecteur nul, l'homothétie de centre O de rapport 1 laissent tout point du plan invariant.

Une telle transformation est appelée **identité du plan** et notée $Id_{\mathcal{P}}$.

Exemple 5. On note t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 + i$, h l'homothétie de centre O de rapport -3 , et s la réflexion d'axe (Ox) . Pour tout point M du plan, on pose $g(M) = t(h(M))$ et $f(M) = g(s(M))$.

1. La transformation g admet-elle un point invariant ? Est-elle une homothétie ?
2. La transformation f admet-elle un point invariant ? Est-elle une homothétie ?

5 Module et opérations

Définition 8. Soit un nombre complexe $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Le **module** de z est le nombre réel positif défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Remarque : Si M et $\vec{u}$ ont pour affixe z alors $|z| = OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$.

Proposition 5. Si A et B sont deux points du plan et si $r \in \mathbb{R}_+^*$ alors

1. $|z_A - z_B| = AB = \|\vec{AB}\|$;
2. M d'affixe z est sur le cercle de centre A de rayon r ssi $|z - z_A| = r$
3. M d'affixe z est sur le disque de centre A de rayon r ssi $|z - z_A| \leq r$
4. M d'affixe z est sur la médiatrice de $[AB]$ ssi $|z - z_A| = |z - z_B|$

Exemple 6. Déterminer et tracer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

- a) $|z + 2i| = 2$ b) $|z - 1 + i| = |z|$ c) $|1 + iz| \leq 1$

Propriété 2. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $|z|^2 = z\bar{z}$ et $|\bar{z}| = |z|$ 2. $|z| = 0 \iff z = 0$ $|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$
3. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ et $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$, si $z' \neq 0$ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$

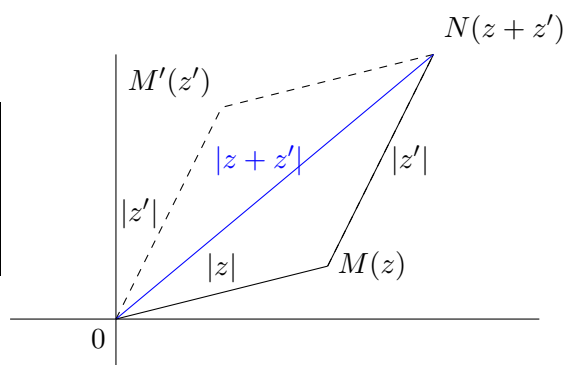
Exemple 7. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on pose $f(z) = \frac{iz + 1}{iz - 1}$. Montrer que a) $|f(z)| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$

b) $|f(z)| < 1 \iff Im(z) > 0$. Interpréter géométriquement ces résultats.

Propriété 3. Inégalité triangulaire

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

avec égalité ssi $z' = 0$ ou $z = kz'$ avec $k \in \mathbb{R}_+$.



Exemple 8. Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$. Interpréter ce résultat.

6 Équations du second degré

Théorème 2. (et définition) Pour tout nombre complexe Δ non nul, l'équation $z^2 = \Delta$ admet deux solutions complexes opposées. Celles-ci sont appelées racines carrées de Δ .

Remarque : L'écriture $\sqrt{\Delta}$ ne s'utilise que pour un réel Δ positif et désigne l'unique réel positif dont le carré est Δ .

Exemple 9. Déterminer les racines carrées de $8 - 4i$.

Théorème 3. (et définition) Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ (**forme développée**),

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

1. $P(z) = a \left[(z - z_0)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$, où $z_0 = \frac{-b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ (**forme canonique**).

2. $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$, où $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $\delta^2 = \Delta$ (**forme factorisée**).

Le nombre Δ est appelé discriminant de l'équation du second degré $P(z) = 0$.

- Si $\Delta = 0$, cette équation a une unique solution, z_0 , appelée racine double.
- Si $\Delta \neq 0$, cette équation a deux solutions distinctes, z_1 et z_2 , appelées racines simples.

Exemple 10. Résoudre : a) $2z^2 - 3z - 1 = 0$ b) $z^2 + z + 1 = 0$ c) $z^2 + 2iz - 3 + i = 0$

Propriété 4. Somme et produit des racines Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$ ssi $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.

Exemple 11. Résoudre l'équation $z^2 + 4z - 5 = 0$ le plus rapidement possible.

Corollaire 1. Si on connaît la somme $s = z_1 + z_2$ et le produit $p = z_1 \times z_2$ alors

z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

Exemple 12. Déterminer tous les rectangles de périmètre 16 et d'aire 1.