

Correction du devoir de vacances

Exercice 1

1. a) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ $\alpha = 150$ degrés. b) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ $\alpha = 36$ degrés.
c) $\alpha = 0,6$ $\alpha = 0,6 \times \frac{180}{\pi} = \frac{108}{\pi} \simeq 34$ degrés au degré près.
2. a) $\beta = 12,5$ $\beta = \frac{12,5\pi}{180} = \frac{5\pi}{72}$ radians. b) $\beta = 60$ $\beta = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ radians.
c) $\beta = 168$ $\beta = \frac{168\pi}{180} = \frac{14\pi}{15}$ radians.

3.

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{17\pi}{6}$
$\cos x$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

4. (a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ $I = [0 ; 2\pi]$ $S = \{\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\}$
(b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ $I = [-2\pi ; 2\pi]$ $S = \{-\frac{\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\}$
5. (a) Pour tout nombre réel x , $\cos(2x) = 2\cos(x)$.
Faux Contre exemple : $\cos(2\pi) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$.
(b) Pour tout nombre réel x , $\cos(x + \pi) = \cos(x)$.
Faux $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ ou **Contre exemple :** $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$.
(c) L'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet 4 solutions dans l'intervalle $[0 ; 4\pi]$.
Vrai $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$ dans l'intervalle $[0 ; 4\pi]$.
(d) L'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet 4 solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
Faux $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
(e) Si $\cos(x) = \frac{4}{5}$ et si $x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0]$ alors $\sin(x) = -\frac{3}{5}$.
Vrai $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc
 $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25}{25} - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$
Donc $\sin(x) = \frac{3}{5}$ ou $\sin(x) = -\frac{3}{5}$.
Or si $x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0]$, $\sin(x) \leq 0$ d'où $\sin(x) = -\frac{3}{5}$.
(f) Pour tout nombre réel x tel que $0 \leq x \leq \pi$, $\cos(x) \geq 0$.
Faux Contre exemple : $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0 \leq \frac{3\pi}{4} \leq \pi$.

(g) Si $x \leq y$ alors $\cos(x) \leq \cos(y)$.

Faux Contre exemple : $0 \leq \frac{\pi}{4}$ mais $\cos(0) = 1$ et $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\cos(x)}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ et $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

De plus, $f(-x) = e^{-\cos(-x)} = e^{-\cos(x)} = f(x)$ car la fonction cosinus est paire, donc la fonction f est paire.

$f(x + 2\pi) = e^{-\cos(x+2\pi)} = e^{-\cos(x)}$ car la fonction cosinus est 2π périodique donc la fonction f est 2π périodique.

2. $f'(x) = u'e^u = \sin x e^{-\cos(x)}$.

$e^{-\cos(x)} > 0$ pour tout x donc f' est du signe de $\sin x$ qui est positif sur $[0 ; \pi]$.

x	0	π
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	e^{-1}	e

3. Soit a est un réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$.

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$T_a : y = \sin a e^{-\cos(a)}(x - a) + e^{-\cos(a)} = \sin a e^{-\cos(a)}x - a \sin a e^{-\cos(a)} + e^{-\cos(a)} = \sin a e^{-\cos(a)}x + e^{-\cos(a)}(1 - a \sin a)$$

4. T_a passe par l'origine si, et seulement si,

$$e^{-\cos(a)}(1 - a \sin a) = 0 \Leftrightarrow 1 - a \sin a = 0 \text{ car } e^{-\cos(a)} > 0 \text{ pour tout } a$$

$$\Leftrightarrow a \sin(a) = 1.$$

5. On considère la fonction φ définie sur $]0 ; \pi]$ par $\varphi(x) = \sin(x) - \frac{1}{x}$.

(a) $\varphi'(x) = \cos(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \cos(x) + \frac{1}{x^2}$ $\varphi''(x) = -\sin x - \frac{2x}{x^4} = -\sin x - \frac{2}{x^3}$.

Sur l'intervalle $]0 ; \pi]$, $\sin x \geq 0$ et $x^3 > 0$ donc $\varphi''(x) \leq 0$

x	0	π
$\varphi''(x)$	0	0
$\varphi'(x)$	$-1 + \frac{1}{\pi^2}$	

- (b) On admet qu'il existe une unique valeur x_0 appartenant à l'intervalle $]0 ; \pi]$ telle que $\varphi'(x_0) = 0$ avec $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.

x	0	x_0	π
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	$-\infty$		$-\frac{1}{\pi}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ car } x > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$$

6. T_a passe par l'origine si, et seulement si,
 $a \sin(a) = 1 \Leftrightarrow \sin(a) = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \sin(a) - \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = 0$.
 On sait que $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ donc, d'après le tableau de variations précédent, φ s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $]0 ; \pi]$ donc deux tangentes à la courbe C passant par l'origine sur $]0 ; \pi]$.

Exercice 3 $u_0 = 1, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 2u_n$ et $v_n = u_n - 2$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 2u_n - 2 = -\frac{1}{2}(u_n^2 - 4u_n + 4) = -\frac{1}{2}v_n^2$ pour tout entier naturel n .

2. **Initialisation** $v_0 = u_0 - 2 = -1$ donc $-1 \leq v_0 \leq 0$.

Hérédité Supposons que $-1 \leq v_n \leq 0$ on a alors

$$0 \leq v_n^2 \leq 1 \text{ car la fonction carrée est décroissante sur } [-1 ; 0]$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0 \text{ en multipliant par } -\frac{1}{2} < 0,$$

$$\text{d'où } -1 \leq -\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq 0$$

Conclusion Pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.

3. $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -\frac{1}{2}v_n(v_n + 1)$

Or $-1 \leq v_n \leq 0$ donc $-\frac{1}{2}v_n \geq 0$ et $v_n + 1 \geq 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ .

5. $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow \ell(\frac{1}{2}\ell + 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\frac{1}{2}\ell = -1 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = -2$

Comme $-1 \leq v_n \leq 0$, $-1 \leq \ell \leq 0$ et $\ell = 0$.

$$u_n = v_n + 2 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$