

Devoir n° 9**A rendre le jeudi 14 décembre 2023**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 .

Quelle(s) conjecture(s) peut-on faire sur le comportement de la suite (u_n) ?

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.

3. Soient les fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ et $g = f \circ f$.

Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0; 1]$.

4. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = g(u_{2n})$.

En déduire que la suite (u_{2n}) est monotone et converge.

5. Démontrer de même que la suite (u_{2n+1}) est monotone et converge.

6. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent-elles vers la même limite?

Que peut en déduire concernant la suite (u_n) ?