

Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. **Correction 1**

$$\begin{aligned}
 \cos(x) + \sin(2x) = 0 &\iff \cos(x) = -\sin(2x) \\
 &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Correction 2

$$\begin{aligned}
 \cos(x) + \sin(2x) = 0 &\iff \cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \\
 &\iff \cos(x)(2\sin(x) + 1) = 0 \\
 &\iff \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{2} \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
 &\quad \text{ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi
 \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &\iff \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{3\pi}{4} - x = \frac{x}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} - x = -\frac{x}{2} + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + \frac{4k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi
 \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{4k\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{3} + 2\cos(x) > 0 \iff \cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\tan(2x) + 1 < 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\tan(2x) < -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ et $2x \in]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right[$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) + \cos x < 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0$ Il faut donc étudier le signe du polynôme du second degré $2X^2 + X - 1$ qui s'annule pour $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$ et qui est strictement négatif ssi $X \in]-1, \frac{1}{2}[$.

Il reste à résoudre les inéquations

$$-1 < \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x \in]\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi[\setminus \{\pi + 2k\pi\}$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right[\cup \left] \pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right[$$

Exercice 2 On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan^2(3x) - 2\sqrt{2}\tan(3x) + 1 = 0$.

1. x est valeur interdite ssi $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

2. $X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$.

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 = 4, \quad X_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1 \text{ et } X_2 = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$

3. $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$$\text{En posant } x = \frac{\pi}{8} \text{ on obtient } \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2\tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \text{ d'où}$$

$$1 = \frac{2\tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2\tan \frac{\pi}{8}$$

$\tan \frac{\pi}{8}$ est alors solution de l'équation $X^2 + 2X - 1 = 0$

$$\Delta = 8 \quad X_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} < 0 \text{ et } X_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1 > 0$$

$$\text{Or } \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \text{ car } 0 \leq \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

4. $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

5. $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$.

6. D'après la question 2., les solutions de (E) vérifient

$$\begin{cases} \tan(3x) = \sqrt{2} + 1 = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \tan(3x) = \sqrt{2} - 1 = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En vérifiant que ces valeurs ne sont pas interdites, on obtient les solution de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{En effet } \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k'\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (k - k')\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow k - k' = \frac{3}{8}$$

$$\text{De même } \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k'\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (k - k')\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24} \Leftrightarrow k - k' = \frac{1}{24}$$

ce qui est impossible dans les deux cas sachant que $k - k' \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 $f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$.

1. (a) $f(i) = \frac{i-1}{-i} = (i-1)i = \boxed{-1-i}$.

(b) $f(\sqrt{3}+i) = \frac{\sqrt{3}+i-1}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \boxed{\frac{2-\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}-1)}{4}}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On a :

$$f(z) = 2i \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i} = 2i \Leftrightarrow z-1 = 2iz+4 \Leftrightarrow z(1-2i) = 5 \Leftrightarrow z = \frac{5}{1-2i}.$$

$$\frac{5}{1-2i} = \frac{5(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = 1+2i. \text{ Donc } \boxed{S = \{1+2i\}}.$$

3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on a :

$$f(z) = \omega \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i} = \omega \Leftrightarrow z-1 = z\omega - 2i\omega \Leftrightarrow z(1-\omega) = 1-2i\omega.$$

$$\boxed{\text{Si } \omega \neq 1, \text{ l'équation } f(z) = \omega \text{ admet pour unique solution } z_0 = \frac{1-2i\omega}{1-\omega}.$$

$$\boxed{\text{Si } \omega = 1, \text{ l'équation } f(z) = \omega \text{ n'admet pas de solution}}, \text{ car } 1-2i\omega = 1-2i \neq 0.$$

4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

$$f(z) = z-2 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i} = z-2 \Leftrightarrow z-1 = z^2-2iz-2z+4i \Leftrightarrow z^2-(3+2i)z+1+4i=0,$$

qui est une équation du second degré de discriminant $\Delta = (3+2i)^2 - 4(1+4i) = 1-4i$.

On cherche $\delta = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, tel que

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{1^2+4^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ xy = -2 < 0 \end{cases}.$$

Donc $\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ convient et les solutions de l'équation $f(z) = z-2$ sont

$$\boxed{z_1 = \frac{3+2i-\delta}{2} \text{ et } z_2 = \frac{3+2i+\delta}{2}},$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. $f(z) \in \mathbb{R} \iff \overline{\left(\frac{z-1}{z-2i}\right)} = \frac{z-1}{z-2i}$ donc

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff (\bar{z}-1)(z-2i) = (z-1)(\bar{z}+2i) \iff 2i(z+\bar{z}) + z - \bar{z} - 4i = 0.$$

En posant $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 2)\}$, on a $f(z) \in \mathbb{R} \iff 2x + y - 2 = 0$

Notons que $(0, 2)$ vérifie cette équation.

L'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $f(z) \in \mathbb{R}$ est $\{x + i(2-x), x \in \mathbb{R}^*\}$

ce qui correspond à la droite d'équation $y = 2 - 2x$ privée du point A d'abscisse 2i

Correction 2 Si on écrit $f(z)$ sous forme algébrique, on obtient

$$f(z) = \frac{x^2 + y^2 - x - 2y + i(2x + y - 2)}{x^2 + (y-2)^2} \text{ et on retrouve le même résultat en exprimant } \operatorname{Im}(f(z)) = 0.$$

6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

Correction géométrique $|f(z)| = 1 \iff \frac{|z-1|}{|z-2i|} = 1 \iff |z-1| = |z-2i| \iff M(z)$

appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ où A est le point d'abscisse 2i et B le point d'abscisse 1.

Cette droite passe par le milieu I de $[AB]$ qui a pour abscisse $\frac{1}{2} + i$ et a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AB}(1-2i)$.

Une équation de cette droite est donc $x - 2y + c = 0$ avec $c = -x_I + 2y_I = \frac{3}{2}$

ce qui correspond à la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$

Correction analytique $|f(z)| = 1 \iff \frac{|z-1|}{|z-2i|} = 1 \iff |z-1|^2 = |z-2i|^2,$

car tout est positif. Donc

$$|f(z)| = 1 \iff (\bar{z}-1)(z-1) = (\bar{z}+2i)(z-2i) \iff z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4$$

En posant $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 2)\}$, on a

$$|f(z)| = 1 \iff -2x + 1 = -4y + 4 \iff y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

Notons que $(0, 2)$ ne vérifie pas cette équation.

L'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $|f(z)| = 1$ est $\left\{x + i\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right), x \in \mathbb{R}\right\}$