

Devoir surveillé n° 1

(2 h)

Ce devoir est constitué de quatre exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.

La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **5,5 points** : 1. 1 2. 1 3. 1 4. 1 5. 1.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) + \sin(2x) = 0$
2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
3. $\sqrt{3} + 2\cos(x) > 0$
4. $\tan(2x) + 1 < 0$
5. $\cos(2x) + \cos x < 0$

Exercice 2 **5 points** : 1. 0.5 2. 1 3. 1.5 4. 0.5 5. 0.5 6. 1

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \tan^2(3x) - 2\sqrt{2}\tan(3x) + 1 = 0$.

1. Quelles sont les valeurs interdites pour les solutions de l'équation (E) ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(F) : X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$.
3. En utilisant l'expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$, déterminer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
5. Démontrer que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) .

Exercice 3 **9,5 points** : 1. 1 2. 1 3. 1.5 4. 2 5. 2 6. 2

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Calculer puis écrire sous forme algébrique : (a) $f(i)$ (b) $f(\sqrt{3} + i)$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = 2i$. On écrira chaque solution sous forme algébrique.
3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé.

Déterminer, suivant les valeurs de ω , le nombre de solution(s) de l'équation $f(z) = \omega$.

4. Résoudre l'équation $f(z) = z - 2$.
5. Déterminer l'ensemble des valeurs de z telles que $f(z) \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer l'ensemble des valeurs de z telles que $|f(z)| = 1$.